



TITLE:

A note on(spin) coherent state path integral

AUTHOR(S):

柴田, 絢也

CITATION:

柴田, 絢也. A note on(spin) coherent state path integral. 物性研究 1998, 70(6): 743-772

ISSUE DATE:

1998-09-20

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/96422>

RIGHT:

修士論文 (1997年度)

A note on (spin) coherent state path integral

東北大学大学院理学研究科
物理学専攻
柴田 絢也

Abstract

時間に関する連続形式における (spin) coherent state path integral の問題点を詳細に議論する。一貫して離散形式で具体的な問題を、stationary action approximation の方法によって解くことにより、連続形式における問題点を解決する。さらに Klauder の ϵ 項に関する考察により、揺らぎの積分が今までの連続形式では、間違った答えを導出してしまふことを指摘する。

1 Introduction

現在、経路積分は様々な分野で用いられている。今後、その傾向は変わらないであろう。その理由としては、物理的な描像が直観的に理解しやすい点や、新たな近似計算の可能性を内包しているという点である。経路積分によって計算を進めていく為に最も用いられている手法は、停留位相近似 (stationary phase approximation) と呼ばれる方法である。量子力学的遷移振幅もしくは分配関数を求める際に、最も寄与する経路を求め、そのまわりの揺らぎを積分する方法である。一般に経路積分として用いられているのは、位相空間経路積分 [1] (Feynman 経路積分 [2]), コヒーレント状態経路積分 [1][3], スピンコヒーレント経路積分 [3][4][5] の3つを挙げることができるだろう¹。特に SCSPI は凝縮系物理で非常に多く用いられており [6]、最近注目されている メソスコピック (mesoscopic) 磁性体における巨視的量子現象 (Macroscopic Quantum Phenomena) を理論的に解析する上で、欠かせない手法である [7]。これらは一般に良く用いられる連続形式で書くと、次のように表わされる。

位相空間経路積分

$$\langle q_F | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} T} | q_I \rangle = \int_{PS} \mathcal{D}q \mathcal{D}p \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt \{ p(t) \dot{q}(t) - H(p(t), q(t)) \} \right). \quad (1)$$

コヒーレント状態経路積分

$$\langle \xi_F | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} T} | \xi_I \rangle = \int_{CS} \mathcal{D}\xi \mathcal{D}\xi^* \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt \left\{ \frac{i\hbar}{2} (\xi^*(t) \dot{\xi}(t) - \dot{\xi}^*(t) \xi(t)) - H(\xi^*(t), \xi(t)) \right\} \right) \quad (2)$$

$$= \int_{CS} \mathcal{D}q \mathcal{D}p \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt \left\{ \frac{1}{2} (p(t) \dot{q}(t) - \dot{p}(t) q(t)) - H(p(t), q(t)) \right\} \right). \quad (3)$$

スピンコヒーレント状態

$$\begin{aligned} & \langle \xi_F | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} T} | \xi_I \rangle \\ &= \int_{SCS} \mathcal{D}\xi \mathcal{D}\xi^* \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt \left\{ \frac{i\hbar S}{1 + |\xi(t)|^2} (\xi^*(t) \dot{\xi}(t) - \dot{\xi}^*(t) \xi(t)) - H(\xi^*(t), \xi(t)) \right\} \right). \end{aligned} \quad (4)$$

$$= \int_{SCS} \mathcal{D}\theta \mathcal{D}\phi \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt \left\{ \hbar S \dot{\phi}(t) (\cos \theta(t) - 1) - H(p(t), q(t)) \right\} \right). \quad (5)$$

このように、連続形式では変数を連続変数として扱い、最も積分に寄与する経路を微分方程式によって求める。しかし、(S)CSPI に関して、もともと離散変数だった変数を連続変数として用いる為の指標は経路積分を導出する際に存在しない。しかし、Klauder の処方箋 [3] を用いることにより、PSPI (Feynman PI) と同様の議論を行うことができると、Klauder は述べている。現在では (S)CSPI に関する Klauder の論文は様々な論文に引用されており、連続形式における (S)CSPI は、もはや公式化した感がある。しかし、連続形式における経路積分には曖昧な箇所があり、それを十分に議論しないで用いている人達が多い。中には、連続形式に問題があることに気付いており [8][9]、ちゃんと離散形式で問題を扱って正しい結果を導出

¹ 以下、省略して、位相空間経路積分は PSPI、(スピン) コヒーレント状態経路積分は (S)CSPI と書く。

しいる論文があるけれども、連続形式の何処に問題があるのかを詳細に述べている論文は現在まで殆ど見当たらない。そこで、この論文では先ず、連続形式における経路積分の問題点を指摘する。そして、一貫して離散形式で具体的な問題を解くことにより、連続形式の問題を解決し、更に今までの連続形式では間違った答えを導出してしまふことを指摘する。

2 位相空間経路積分 (Feynman 経路積分)

(S)CSPI の連続形式における問題を議論する前に、PSPI (Feynman PI) の概観を簡単に述べ、停留位相近似の方法を述べる。

2.1 位相空間経路積分における停留位相近似の方法

Feynman 核を経路積分形式で書くと次のように表わされる [1]。

$$\langle q_F | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} T} | q_I \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{n=1}^{N-1} dq_n \prod_{n=1}^N \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \exp \left(\frac{i}{\hbar} S_{PS}[\{p_n\}, \{q_n\}] \right). \quad (6)$$

$$S_{PS}[\{p_n\}, \{q_n\}] \equiv \sum_{n=1}^N \{p_n(q_n - q_{n-1}) - \epsilon H(p_n, q_n)\} \quad (7)$$

ここで、 $q_N \equiv q_F$, $q_0 \equiv q_I$, $\epsilon \equiv T/N$ である。これから、連続形式に移行する。すなわち

$$p_n \rightarrow p(t), \quad q_n \rightarrow q(t), \quad \frac{q_n - q_{n-1}}{\epsilon} \rightarrow \dot{q}(t), \quad (8)$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{n=1}^{N-1} dq_n \prod_{n=1}^N \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \equiv \int_{q(0)=q_I}^{q(T)=q_F} \mathcal{D}q \mathcal{D}p, \quad (9)$$

$$S_{PS}[p, q] = \int_0^T dt \{p(t)\dot{q}(t) - H(p(t), q(t))\}, \quad (10)$$

とすると、連続形式における経路積分公式 (1) が得えられる。Hamiltonian が

$$H(p(t), q(t)) = \frac{p^2(t)}{2m} + V(q(t)), \quad (11)$$

の形にかけるときは、 p に関する積分は Gauss 積分であるからすぐに積分ができる。これから、Feynman の経路積分 [2] が得られる。

$$\langle q_F | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} T} | q_I \rangle = \int_{q(0)=q_I}^{q(T)=q_F} \mathcal{D}q \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_0^T dt \left\{ \frac{m}{2} \dot{q}^2(t) - V(q(t)) \right\} \right). \quad (12)$$

$$\int_{q(0)=q_I}^{q(T)=q_F} \mathcal{D}q \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \int \left(\frac{m}{2\pi i \hbar \epsilon} \right)^{\frac{N}{2}} \prod_{n=1}^{N-1} dq_n. \quad (13)$$

次に PSPI における停留位相近似の方法を簡単に述べる。Feynman 核に最も寄与する経路は (10) を $(p(t), q(t))$ に関して変分して得られる 古典的 Hamilton 方程式を解くことによって得られる。この経路を $p^{cl}(t)$, $q^{cl}(t)$ と書く。

$$\dot{q}^{cl} = \left. \frac{\partial H(p, q)}{\partial p} \right|_{q=q^{cl}, p=p^{cl}}, \quad \dot{p}^{cl} = - \left. \frac{\partial H(p, q)}{\partial q} \right|_{q=q^{cl}, p=p^{cl}}. \quad (14)$$

これらは、2つの1階の微分方程式であるから、境界条件の数は2つ必要である。今、Feynman 核の場合 $q(0) = q_I$, $q(T) = q_F$ という2つの境界条件が存在する。 $p^{cl}(t)$ に関する境界条件は、上の境界条件から一意的に決まる。したがって、方程式から求まる解は一意である。

$p(t)$, $q(t)$ をこの経路とそのまわりの揺らぎに分け、作用 (10) に代入する。

$$q(t) = q^{cl}(t) + \tilde{q}(t), \quad p(t) = p^{cl}(t) + \tilde{p}(t). \quad (15)$$

$$S_{PS}[p^{cl} + p, q^{cl} + q] \simeq S_{cl}[p^{cl}, q^{cl}] + S_2[p, q]. \quad (16)$$

$$S_{cl}[p^{cl}, q^{cl}] \equiv S_{PS}[p^{cl}, q^{cl}]. \quad (17)$$

$$S_2[p, q] \equiv \int_0^T dt \left\{ p(t) \dot{q}(t) - \left(\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} V''(q^{cl}(t)) q^2 \right) \right\} \quad (18)$$

これらから、Feynman 核は次のように書くことができる。

$$\langle q_F | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} T} | q_I \rangle = e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}} \int_{q(0)=0}^{q(T)=0} \mathcal{D}q \mathcal{D}p \exp \left(\frac{i}{\hbar} S_2[p, q] \right). \quad (19)$$

p に関する積分は Gauss 積分であるから、すぐに積分できて結果は

$$\langle q_F | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} T} | q_I \rangle = e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}} \int_{q(0)=0}^{q(T)=0} \mathcal{D}q \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_0^T \left\{ \frac{m}{2} \dot{q}^2(t) - \frac{1}{2} V''(q^{cl}(t)) q^2 \right\} dt \right). \quad (20)$$

となる。 q に関する積分も簡単にできて [1]、その結果停留位相近似の方法において Feynman 核を求めることができた。

$$\langle q_F | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} T} | q_I \rangle = \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar f(T, 0)}} \exp \left(\frac{i}{\hbar} S_{cl} \right). \quad (21)$$

ここで、 $f(T, 0)$ は以下の微分方程式を満たす解である。

$$m \frac{\partial^2 f(t, 0)}{\partial t^2} + V''(q^{cl}(t)) f(t, 0) = 0. \quad (22)$$

$$f(0, 0) = 0, \quad \left. \frac{\partial f(t, 0)}{\partial t} \right|_{t=T} = 1. \quad (23)$$

このように、PSPI に関して、連続形式によって定常位相近似の方法を用いても問題は生じない。同様のことを (S)CSPI で行くと、連続形式では問題が生じてしまうことを以下で述べる。

3 連続形式におけるコヒーレント状態経路積分の問題

この章では、連続形式における CSPI の問題点を述べる。遷移振幅を求める為に連続形式によって停留作用近似の方法²を用いて計算を進めていくと、幾つかの問題が生じてしまう。経路積分を用いなくても実際に答えの分かる調和振動子を例に議論を進める。

コヒーレント状態は次のように定義される。

$$|\xi\rangle \equiv \exp \left[\frac{i}{\hbar} (p \hat{Q} - q \hat{P}) \right] |0\rangle = \exp [\xi^* \hat{a} - \xi \hat{a}^\dagger] |0\rangle. \quad (24)$$

ここで、 $[\hat{Q}, \hat{P}] = i\hbar$ 、 $|0\rangle$ は単位質量、単位振動数の調和振動子における基底状態である。また、

$$\hat{a} \equiv \sqrt{\frac{1}{2\hbar}} (\hat{Q} + i\hat{P}), \quad \xi \equiv \sqrt{\frac{1}{2\hbar}} (q + ip), \quad (25)$$

と定義した。これから、少し変形すると次式が得られる。

$$|\xi\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (26)$$

となる。ここで、 $|n\rangle$ は調和振動子の固有状態の n 番目の励起状態である。これから、一般に

$$e^{-i\hat{a}^\dagger \hat{a} T} |\xi\rangle = |\xi e^{-iT}\rangle, \quad (27)$$

から、Hamiltonian が $\hat{H} = \hbar \hat{a}^\dagger \hat{a}$ のとき、遷移振幅は

$$\begin{aligned} \langle \xi_F | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} T} | \xi_I \rangle &= \langle \xi_F | \xi_I e^{-iT} \rangle \\ &= \exp \left[-\frac{1}{2} (|\xi_F|^2 + |\xi_I|^2) + \xi_F^* \xi_I e^{-iT} \right], \end{aligned} \quad (28)$$

となる。これが、連続形式における経路積分で導出できるのか、停留作用近似の方法によって確かめてみる。

²多くの文献では停留作用近似のことを停留位相近似 (Stationary Phase Approximation) と呼んでいるがコヒーレント状態の場合、指数関数の肩に実数部分が存在すること (これは後で述べるが、経路が複素数になることによる) があり、それは位相とは呼べないので今後ここでは一貫して停留作用近似 (Stationary Action Approximation) と呼ぶ。

3.1 境界条件、停留作用、揺らぎ

連続形式における経路積分表式は

$$\langle \xi_F | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} T} | \xi_I \rangle = \int_{CS} \mathcal{D}\xi \mathcal{D}\xi^* \exp \left(\frac{i}{\hbar} S_{CS}[\xi, \xi^*] \right), \quad (29)$$

で与えられる [1]。ここで、調和振動子の場合 ($\hat{H} = \hbar \hat{a}^\dagger \hat{a}$) を考えると、作用は

$$S_{CS} = \int_0^T dt \left\{ \frac{i\hbar}{2} \left(\xi^*(t) \dot{\xi}(t) - \dot{\xi}^*(t) \xi(t) \right) - \hbar \xi^*(t) \xi(t) \right\}, \quad (30)$$

となる。この作用を $(\xi(t), \xi^*(t))$ に関して変分し、それがゼロになるような経路を停留作用経路と呼び、

$$\xi^S(t), \bar{\xi}^S(t), \quad (31)$$

と表わす。この停留作用経路がしたがう微分方程式は次のように与えられる。

$$\dot{\xi}^S(t) = -i\xi(t). \quad (32)$$

$$\dot{\bar{\xi}}^S(t) = i\bar{\xi}(t). \quad (33)$$

ここで、先ず曖昧な点が存在する。それは境界条件の課し方である。例えば、

$$\xi^S(0) = \xi_I, \bar{\xi}^S(0) = \xi_I^*, \quad (34)$$

のように境界条件を課した場合、解は次のように与えられる。

$$\xi^S(t) = \xi_I e^{-it}. \quad (35)$$

$$\bar{\xi}^S(t) = \xi_I^* e^{it}. \quad (36)$$

しかし、後で示すが実際正しい境界条件は

$$\xi^S(0) = \xi_I, \bar{\xi}^S(T) = \xi_F^*, \quad (37)$$

であり、この時解は

$$\xi^S(t) = \xi_I e^{-it}. \quad (38)$$

$$\bar{\xi}^S(t) = \xi_F^* e^{i(t-T)}. \quad (39)$$

となる。このように、連続形式では境界条件をどのように課したら良いのか分からない。したがって、求まる解は一意的ではない。この曖昧性は (p, q) 表示 ($\xi = \frac{1}{\sqrt{2}}(q + ip)$) で計算するときも同じであり、その時、微分方程式は PSPI の場合と同じ古典的 Hamilton 方程式である。この方程式は 2 つの 1 階の微分方程式であり、境界条件の数は 2 つである。しかし、CSPI の場合境界条件は 4 つ (q_I, p_I, q_F, p_F) 存在する。

ここでははっきりしないけれども境界条件を (37) のように課して、得られた正しい停留作用経路を作用に代入する。その作用を今後、停留作用と呼ぶ。しかし、ここで正しい停留作用が求められないという問題が存在する。停留作用は

$$\begin{aligned} S_{SAP}^{CS} &\equiv S_{CS}[\xi^S, \bar{\xi}^S] \\ &= \int_0^T dt \left\{ \frac{i\hbar}{2} \left(\bar{\xi}^S(t) \dot{\xi}^S(t) - \dot{\bar{\xi}}^S(t) \xi^S(t) \right) - \hbar \bar{\xi}^S(t) \xi^S(t) \right\} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (40)$$

となり、ゼロとなってしまう。これは明らかに任意の ξ_I, ξ_F の時の遷移振幅を求める際に得られる停留作用の値と異なる。連続形式で正しい停留作用を与えている文献 [10][11] があるけれども、これらは一貫性がなく最初から答えが分かっているかのように感じられる。

次に揺らぎの計算を行う。 $(\xi(t), \xi^*(t))$ を停留作用経路と揺らぎに分ける。

$$\xi(t) = \xi^S(t) + \eta(t). \quad (41)$$

$$\xi^*(t) = \bar{\xi}^S(t) + \eta^*(t). \quad (42)$$

境界条件から

$$\eta(0) = 0, \eta^*(T) = 0, \quad (43)$$

である。これらを作用に代入し、 $(\eta(t), \eta^*(t))$ に対して 1 次の項は停留条件により消えるから、2 次の項までとると

$$S_{CS}[\xi^S + \eta, \bar{\xi}^S + \eta^*] \simeq S_{SAP}^{CS}[\xi^S, \bar{\xi}^S] + S_2^{CS}[\eta, \eta^*], \quad (44)$$

$$S_2^{CS}[\eta, \eta^*] \equiv i\hbar \int_0^T dt \eta^*(t) \left(\frac{d}{dt} + i \right) \eta(t), \quad (45)$$

となる。したがって、揺らぎの積分は

$$\int \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\eta^* \exp \left(\frac{i}{\hbar} S_2^{CS}[\eta, \eta^*] \right) \propto \left(\det \left(\frac{d}{dt} + i\omega \right) \right)^{-1}. \quad (46)$$

となる。しかし、この \det の計算はできない。何故なら境界条件 (43) を満たすような固有関数が存在しないからである。ここでも、連続形式において問題が生じた。

以上みてきたように、一貫して連続形式で計算を進めると非常に多くの問題があるということが分かった。しかし Klauder [3] によって、連続形式で計算を進めていく為に、境界条件を課すこと、正しい停留作用を求めることに関しての問題を回避する処方箋が与えられている。次にこの処方箋を簡単に紹介する。

3.2 Klauder の処方箋, ϵ 項

Klauder は連続形式で CSPI を PSPI と同様の考え方、すなわち停留作用近似の方法、で計算する為の処方箋を与えた [3]。 $\xi, (q, p)$ 表示、どちらも同じことであるが、方程式の数より境界条件の方が多いのは、今までの連続形式において無視されている項があるからである。Klauder の論文にならって、ここでは (q, p) 表示でのコヒーレント状態経路積分を考える。厳密な離散形式での (q, p) 表示でのコヒーレント状態経路積分は次のように与えられる。

$$\langle p_F, q_F | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} T} | p_I, q_I \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{n=1}^{N-1} \frac{dq_n dp_n}{2\pi\hbar} \exp \left(\frac{i}{\hbar} S_{CS}[\{p_n\}, \{q_n\}] \right). \quad (47)$$

ここで、 $|p, q\rangle$ はコヒーレント状態であり、 $|\xi\rangle$ のことである。Klauder の論文にならって q, p で書いているけれども、実際に座標 q 、運動量 p を与えている訳ではない。これは非常に誤解を招きやすいので注意しよう。作用は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} S_{CS}[\{p_n\}, \{q_n\}] &= \sum_{n=1}^N \left[\frac{i}{4} \{ (p_n - p_{n-1})^2 + (q_n - q_{n-1})^2 \} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \{ p_{n-1}(q_n - q_{n-1}) - (p_n - p_{n-1})q_{n-1} \} - \epsilon \mathcal{H}(p_n, p_{n-1}, q_n, q_{n-1}) \right] \end{aligned} \quad (48)$$

ここで、Hamiltonian の項は

$$\mathcal{H}(p_n, p_{n-1}, q_n, q_{n-1}) \equiv \frac{\langle p_n, q_n | \hat{H} | p_{n-1}, q_{n-1} \rangle}{\langle p_n, q_n | p_{n-1}, q_{n-1} \rangle}, \quad (49)$$

であり、本来は p_n, q_n に関して対角形になっていないことに注意しよう。これから、Klauder は形式的に連続形式に移行する為に次のようなことを行った。

$$S_{CS} \rightarrow \int_0^T dt \left[\frac{i}{4} \{ (\dot{p}(t))^2 + (\dot{q}(t))^2 \} + \frac{1}{2} \{ p(t)\dot{q}(t) - \dot{p}(t)q(t) \} - H(p(t), q(t)) \right] \quad (50)$$

第 2 項、第 3 項は今までの通常の連続形式である。この時、Hamiltonian は p, q に関して対角形である。しかし、第 1 項が非常に奇妙な形をしている。通常、差 $\Delta p_n \equiv p_n - p_{n-1}$, $\Delta q_n \equiv q_n - q_{n-1}$ に関して 2 次の項であるという理由で無視されている項を ϵ を頭わに書いて残したのである。今後この項を ϵ 項と呼ぶ。前節での ξ 表示との関係をはっきりさせておく。 ξ 表示における厳密な離散形式での作用は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} S_{CS}[\{\xi_n\}, \{\xi_n^*\}] &= \sum_n \left[\frac{i\hbar}{2} \{ \xi_n^*(\xi_n - \xi_{n-1}) - (\xi_n^* - \xi_{n-1}^*)\xi_n + (\xi_n^* - \xi_{n-1}^*)(\xi_n - \xi_{n-1}) \} \right. \\ &\quad \left. - \epsilon \mathcal{H}(\xi_n^*, \xi_{n-1}) \right]. \end{aligned} \quad (51)$$

右辺第3項の差に関して2次の項が(48)の右辺第1項である。したがって、 ϵ を残した形で連続形式に移行すると、

$$S_{CS} \rightarrow \int_0^T \left[\frac{i\hbar}{2} \{ \epsilon \dot{\xi}^*(t) \dot{\xi}(t) + \xi^*(t) \dot{\xi}(t) - \dot{\xi}^*(t) \xi(t) \} - H(\xi^*(t), \xi(t)) \right] \quad (52)$$

となる。

このように作用を形式的に連続形式で書けば、それを $(p(t), q(t))$ に関して変分して得られる運動方程式は次のように与えられる。

$$\dot{q} = \frac{\partial H(p, q)}{\partial p} + \frac{i\epsilon}{2} \ddot{p}. \quad (53)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H(p, q)}{\partial q} - \frac{i\epsilon}{2} \ddot{q}. \quad (54)$$

ϵ を含む項によって、初期時刻の後、最終時刻の前で、経路に $O(1)$ のとびが現れる。しかし、この方程式から最初に指摘した境界条件の曖昧性は回避される。更にこの方程式から得られる停留作用経路（一般には複素数である。）を作用に代入すると正しい停留作用が得られる。この時 ϵ 項は停留作用には寄与しない。したがって、Klauder の処方箋を用いれば、通常の連続形式で議論を進めても良いということを、彼は主張している。しかし、形式的に連続形式で議論を進めると、初期時刻と最終時刻で不自然な経路の振る舞いが見られる。さらに、彼は揺らぎを考察していない。したがって、揺らぎの計算に ϵ 項が寄与しないのか明らかではない。このことなど、連続形式ではまだ曖昧な点が残るのである。もともと経路積分は離散形式で定義されており、 $\epsilon \rightarrow 0 (N \rightarrow \infty)$ の極限操作は、離散変数で全ての計算を終えた後に、行うものである。したがって、次の章では一貫して離散形式で計算をすることにより、連続形式における問題点を全て解決する。更に連続形式では揺らぎの積分が、 ϵ 項を無視した為に間違ってしまうことを指摘する。

4 離散形式におけるコヒーレント状態経路積分

この章では、一貫して離散形式で計算を進めていくことにより、連続形式における問題をすべて解決する。

4.1 経路積分公式

ξ 表示において遷移振幅は次のように表わされる。

$$K_{CS}(\xi_F, T; \xi_I, 0) = \langle \xi_F | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} T} | \xi_I \rangle. \quad (55)$$

ここで、完全性関係

$$\int \frac{d\xi d\xi^*}{\pi} |\xi\rangle \langle \xi| = 1, \quad (56)$$

を(55)の右辺に各時間間隔毎に挿入し変形すると離散形式における CSPI が得られる。

$$K_{CS}(\xi_F, T; \xi_I, 0) = \langle \xi_F | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} T} | \xi_I \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{n=1}^{N-1} \frac{d\xi_n d\xi_n^*}{\pi} \exp \left(\frac{i}{\hbar} S_{CS}[\{\xi_n^*\}, \{\xi_n\}] \right) \quad (57)$$

$$\frac{i}{\hbar} S_{CS}[\{\xi_n^*\}, \{\xi_n\}] = \sum_{n=1}^N \left\{ -\frac{1}{2} (|\xi_n|^2 + |\xi_{n-1}|^2) + \xi_n^* \xi_{n-1} - \frac{i}{\hbar} \epsilon \mathcal{H}(\xi_n^*, \xi_{n-1}) \right\} \quad (58)$$

$$\mathcal{H}(\xi_n^*, \xi_{n-1}) \equiv \frac{\langle \xi_n | \hat{H} | \xi_{n-1} \rangle}{\langle \xi_n | \xi_{n-1} \rangle} \quad (59)$$

ここで、 $\epsilon \equiv T/N$, $\xi_N \equiv \xi_F$, $\xi_0 \equiv \xi_I$ である。

次にこれを用いて具体的な計算を行う。

4.2 停留作用近似

この節では、経路積分で多く使われている停留作用近似の方法を議論する。これは (58) を (ξ, ξ^*) に関して変分することによって、停留作用経路 (Stationary Action Path) を求め、その周りにおいて ξ, ξ^* を展開する。そして揺らぎに関しては 2 次までを考慮して、それを積分することによって遷移振幅を求める方法である。(58) を (ξ, ξ^*) に関して変分し、それがゼロになるような経路が停留作用経路である。それを

$$\xi_n^S, \bar{\xi}_n^S, \quad n = 1, 2, \dots, N-1, \quad (60)$$

とする。ここで注意が必要なのは、変分すべき変数はあくまで、時間の両端を除いた $n = 1, 2, \dots, N-1$ の ξ_n, ξ_n^* である。したがって、 ξ_I, ξ_F^* を含む項の変分は、別扱いする必要がある。以上のことに注意して変分すると

$$\left. \frac{i}{\hbar} \frac{\delta S_{CS}}{\delta \xi_n^*} \right|_S = \left(-\xi_n + \xi_{n-1} - \frac{i}{\hbar} \epsilon \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_n^*} \right) \Big|_S = 0, \quad n = 2, \dots, N-1. \quad (61)$$

$$\left. \frac{i}{\hbar} \frac{\delta S_{CS}}{\delta \xi_1^*} \right|_S = \left(-\xi_1 + \xi_I - \frac{i}{\hbar} \epsilon \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_1^*} \right) \Big|_S = 0. \quad (62)$$

$$\left. \frac{i}{\hbar} \frac{\delta S_{CS}}{\delta \xi_n} \right|_S = \left(-\xi_n^* + \xi_{n+1}^* - \frac{i}{\hbar} \epsilon \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_n} \right) \Big|_S = 0, \quad n = 1, \dots, N-2. \quad (63)$$

$$\left. \frac{i}{\hbar} \frac{\delta S_{CS}}{\delta \xi_{N-1}} \right|_S = \left(-\xi_{N-1}^* + \xi_F^* - \frac{i}{\hbar} \epsilon \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_{N-1}} \right) \Big|_S = 0. \quad (64)$$

となる。ただし

$$\left. \dots \right|_S \equiv \left. \dots \right|_{\substack{\{\xi_n\} = \{\xi_n^S\} \\ \{\xi_n^*\} = \{\bar{\xi}_n^S\}}}, \quad (65)$$

である。これから、停留作用経路がしたがう差分方程式が得られる。

$$\xi_n^S - \xi_{n-1}^S = -\frac{i}{\hbar} \epsilon \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_n^*} \Big|_S, \quad n = 2, \dots, N-1. \quad (66)$$

$$\xi_1^S - \xi_I = -\frac{i}{\hbar} \epsilon \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_1^*} \Big|_S. \quad (67)$$

$$\bar{\xi}_{n+1}^S - \bar{\xi}_n^S = \frac{i}{\hbar} \epsilon \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_n} \Big|_S, \quad n = 1, \dots, N-2. \quad (68)$$

$$\xi_F^* - \bar{\xi}_{N-1}^S = \frac{i}{\hbar} \epsilon \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_{N-1}} \Big|_S. \quad (69)$$

これは、 $2(N-1)$ 個の変数 $(\xi_n^S, \bar{\xi}_n^S)$ に対する $2(N-1)$ 個の連立方程式であり微分方程式ではない。したがって「課すべき初期 (又は境界) 条件」などというものは存在しないことに注意しておこう。更に、この連立方程式には ξ_I^*, ξ_F が含まれていないことに注意しよう。ここで便宜上、変数ではないけれども

$$\xi_0^S \equiv \xi_I, \quad (70)$$

$$\bar{\xi}_N^S \equiv \xi_F^*, \quad (71)$$

と定義すると、上記 4 式を 2 つの式にまとめることができ都合が良い。すなわち

$$\xi_n^S - \xi_{n-1}^S = -\frac{i}{\hbar} \epsilon \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_n^*} \Big|_S, \quad n = 1, \dots, N-1. \quad (72)$$

$$\bar{\xi}_{n+1}^S - \bar{\xi}_n^S = \frac{i}{\hbar} \epsilon \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_n} \Big|_S, \quad n = 1, \dots, N-1. \quad (73)$$

とする。これを、 ξ_n^S ($n = 0, 1, \dots, N-1$) と $\bar{\xi}_n^S$ ($n = 1, 2, \dots, N$) に関する方程式と解釈し直せば、 ξ_n^S には “初期条件 (70) を課すべき” であり $\bar{\xi}_n^S$ には “終期条件 (71) を課すべき” であることになる。(72)

と (73) より、停留作用経路に関して $\xi_n^S - \xi_{n-1}^S$ および $\bar{\xi}_{n+1}^S - \bar{\xi}_n^S (1 \leq n \leq N-1)$ は ϵ 程度であることが分かる。したがって、上記の差分方程式を

$$\frac{d\xi^S(t)}{dt} = -\frac{i}{\hbar} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi^*(t)} \Big|_S, \quad (74)$$

$$\frac{d\bar{\xi}^S(t)}{dt} = \frac{i}{\hbar} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi(t)} \Big|_S, \quad (75)$$

と連続変数で表わしてもよい。これに課すべき境界条件は、(70)、(71) より

$$\xi^S(0) = \xi_I, \quad (76)$$

$$\bar{\xi}^S(T) = \bar{\xi}_F^*, \quad (77)$$

である。これが、前章で境界条件を (37) のように課した理由である。すなわち離散形式では、方程式の中に ξ_I, ξ_F^* しか含まれていないからである。この微分方程式の解を用いれば

$$\xi_n^S = \xi^S(t_n) + O(\epsilon), \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (78)$$

$$\bar{\xi}_n^S = \bar{\xi}^S(t_n) + O(\epsilon), \quad 1 \leq n \leq N, \quad (79)$$

$$t_n \equiv n\epsilon,$$

である。ただし、(72) と (73) において ξ_F と ξ_I^* は現れないから、 $\xi_F - \xi_{N-1}^S, \bar{\xi}_1^S - \xi_I^*$ が ϵ 程度ということはいえず、" ξ^S の終点" と " $\bar{\xi}^S$ の始点" は連続近似で表わすことは出来ない。そもそも、離散形式で考えれば $\xi_N^S, \bar{\xi}_0^S$ というものは存在しない。また、もとの積分変数 (ξ_n, ξ_n^*) の段階で $\xi_n - \xi_{n-1}$ などが ϵ 程度であるということは、経路積分表式を導出する段階で出てこないことに注意せねばならない。

具体的に Hamiltonian を

$$\hat{H} = \hbar \hat{a}^\dagger \hat{a}, \quad (80)$$

とすると、差分方程式は次式で与えられる。

$$\xi_n^S - \xi_{n-1}^S = -i\epsilon \xi_{n-1}^S, \quad \bar{\xi}_{n+1}^S - \bar{\xi}_n^S = i\epsilon \bar{\xi}_{n+1}^S, \quad n = 1, 2, \dots, N-1. \quad (81)$$

これらの方程式は簡単に解くことができ、解はそれぞれ

$$\xi_n^S = (1 - i\epsilon)^n \xi_I \simeq \xi_I e^{-it_n}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (82)$$

$$\bar{\xi}_n^S = (1 - i\epsilon)^{N-n} \bar{\xi}_F^* \simeq \bar{\xi}_F^* e^{i(t_n - T)}, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (83)$$

となる。ここで注意が必要なのが ξ_n^S と $\bar{\xi}_n^S$ は互いに複素共役にはなっていないことである。したがって、 $\xi_n^S, \bar{\xi}_n^S$ を

$$\xi_n^S \equiv \sqrt{\frac{1}{2\hbar}} (q_n^S + ip_n^S), \quad (84)$$

$$\bar{\xi}_n^S \equiv \sqrt{\frac{1}{2\hbar}} (q_n^S - ip_n^S), \quad (85)$$

と書いたときに、一般に q_n^S と p_n^S は実数ではなく、かつ "始点" と "終点" にオーダー 1 のとびが生ずる。(図 1) これから、 q_n^S, p_n^S は

$$q_n^S = \sqrt{\frac{\hbar}{2}} (\xi_n^S + \bar{\xi}_n^S) = \sqrt{\frac{\hbar}{2}} (\xi_I e^{-it_n} + \bar{\xi}_F^* e^{i(t_n - T)}), \quad (86)$$

$$p_n^S = -i\sqrt{\frac{\hbar}{2}} (\xi_n^S - \bar{\xi}_n^S) = -i\sqrt{\frac{\hbar}{2}} (\xi_I e^{-it_n} - \bar{\xi}_F^* e^{i(t_n - T)}). \quad (87)$$

$$n = 1, 2, \dots, N-1.$$

である。これで、 ϵ 項の意味が明らかになった。離散形式で考えれば、変数はあくまで $n = 1, \dots, N-1$ の $N-1$ 個であり、始点、終点というものは、あらかじめ与えられている定数である。連続形式では無理矢

理、始点、終点を連続変数として考え様とした為に、 ϵ というものを導入せざるを得なかったのである。もし、 $\xi_F = \xi_I e^{-iT}$ という特殊な場合に限り、停留作用経路は

$$\xi_n^S = \xi_I e^{-it_n}, \quad (88)$$

$$\bar{\xi}_n^S = \xi_I^* e^{it_n} = (\xi_n^S)^*, \quad (89)$$

となり、互いに複素共役になっているので q_n^S, p_n^S は

$$q_n^S = q_I \cos t_n + p_I \sin t_n, \quad (90)$$

$$p_n^S = -q_I \sin t_n + p_I \cos t_n, \quad (91)$$

となり実数である。ここで

$$\xi_I \equiv \sqrt{\frac{1}{2\hbar}} (q_I + ip_I), \quad (92)$$

である。今 Hamiltonian が調和振動子であるから、(90)、(91) はまさに古典力学から導かれる軌道を描いている。更に両端も含めて滑らかに繋がっている。しかし、このように終点 ξ_F が位相も含めて $\xi_I e^{-iT}$ に等しいという特別な場合のみこれが成り立ち、一般的な ξ_F のときは q_n^S, p_n^S は複素数であり、お互い複素平面上の軌道を描く。

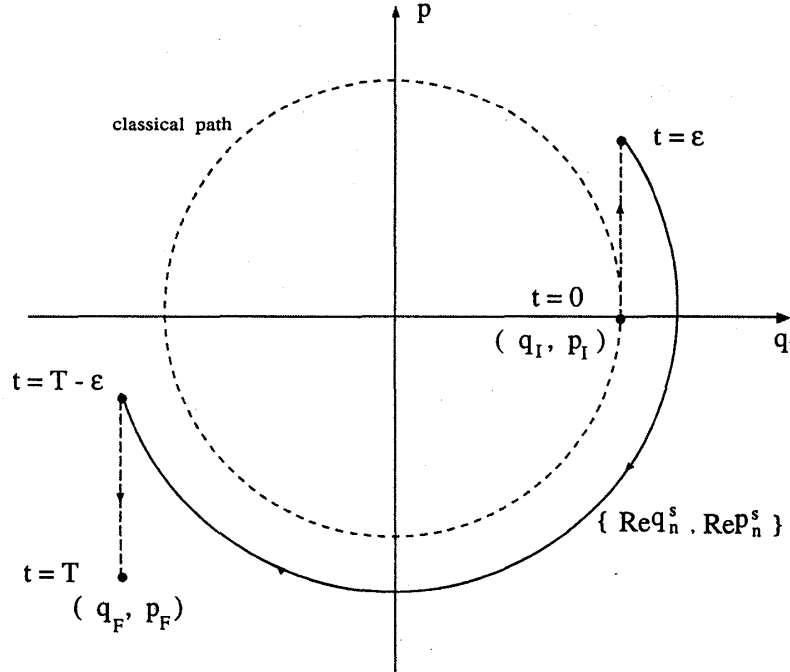


Figure 1: 停留作用経路の実数部分。点線の軌道は終点が $\xi_F = \xi_I e^{-iT}$ という特殊な場合。

4.3 停留作用と揺らぎ

停留作用経路が求まったので、 ξ_n, ξ_n^* を停留作用経路と揺らぎに分ける

$$\xi_n = \xi_n^S + \eta_n, \quad (93)$$

$$\xi_n^* = \bar{\xi}_n^S + \eta_n^*, \quad (94)$$

ここで、(70)、(71) から $\eta_0 = \eta_N^* = 0$ である。これを (58) に代入する。

$$S[\{\xi_n\}, \{\xi_n^*\}] \simeq S_{SAP}^{CS}[\{\xi_n^S\}, \{\bar{\xi}_n^S\}] + S_2^{CS}[\{\eta_n\}, \{\eta_n^*\}] \quad (95)$$

ここで

$$\begin{aligned} \frac{i}{\hbar} S_{SAP}^{CS}[\{\xi_n^S\}, \{\bar{\xi}_n^S\}] &\equiv \frac{i}{\hbar} S[\{\xi_n^S\}, \{\bar{\xi}_n^S\}] \\ &= -\frac{1}{2}(|\xi_F|^2 + |\xi_I|^2) - \sum_{n=1}^{N-1} \bar{\xi}_n^S \xi_n^S + \sum_{n=1}^N \bar{\xi}_n^S \xi_{n-1}^S - i\epsilon \sum_{n=1}^N \bar{\xi}_n^S \xi_{n-1}^S \\ &= -\frac{1}{2}(|\xi_F|^2 + |\xi_I|^2) - \sum_{n=1}^{N-1} \bar{\xi}_n^S \{\xi_n^S - \xi_{n-1}^S + i\epsilon \xi_{n-1}^S\} + (1-i\epsilon) \bar{\xi}_N^S \xi_{N-1}^S, \end{aligned} \quad (96)$$

$$\begin{aligned} \frac{i}{\hbar} S_2^{CS}[\{\eta_n\}, \{\eta_n^*\}] &\equiv -\sum_{n=1}^{N-1} \eta_n^* \eta_n + \sum_{n=1}^{N-1} \eta_n^* \eta_{n-1} - i\epsilon \sum_{n=1}^{N-1} \eta_n^* \eta_{n-1} \\ &= -\sum_{n=1}^{N-1} \eta_n^* \{\eta_n - (1-i\epsilon)\eta_{n-1}\}, \end{aligned} \quad (97)$$

である。(97) で Hamiltonian の項は $\eta_n^* \eta_{n-1}$ に比例している。しかし、連続形式で計算していたときはこの項が、 $\eta_n^* \eta_n$ に比例していた。この為に、Hamiltonian の項から Gauss 因子に相当するものが出てきてしまい、揺らぎの積分を間違ってしまったのである。(96) に (81)、(82)、(83) を代入すると

$$\frac{i}{\hbar} S_{SAP}^{CS} = -\frac{1}{2}(|\xi_F|^2 + |\xi_I|^2) + \xi_F^* \xi_I \left(1 - \frac{iT}{N}\right)^N, \quad (98)$$

となるから、遷移振幅は

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{CS}(\xi_F, T; \xi_I, 0) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{n=1}^{N-1} \frac{d\eta_n d\eta_n^*}{\pi} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_{SAP}^{CS} + i S_2^{CS}\right) \\ &\equiv \exp\left[-\frac{1}{2}(|\xi_F|^2 + |\xi_I|^2) + \xi_F^* \xi_I e^{-iT}\right] \mathcal{K}_2^{CS}(0, T; 0, 0), \end{aligned} \quad (99)$$

となる。ここで

$$\mathcal{K}_2^{CS}(0, T; 0, 0) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\eta_0=0} \prod_{n=1}^{N-1} \frac{d\eta_n d\eta_n^*}{\pi} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_2^{CS}[\{\eta_n\}, \{\eta_n^*\}]\right), \quad (100)$$

であり、

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{iT}{N}\right)^N = e^{-iT}, \quad (101)$$

を用いた。次に (100) を計算するわけであるが、これは (97) を参照して、 η_n, η_n^* を

$$\eta_n' \equiv \eta_n - (1-i\epsilon)\eta_{n-1}, \quad (102)$$

$$\eta_n'^* \equiv \eta_n^*, \quad (103)$$

とそれぞれ独立に変換すれば (順に η_{N-1} から積分することにすれば、 η_n 積分において η_{n-1} は定数である)、各 n に対して

$$\eta_n^* \{\eta_n - (1-i\epsilon)\eta_{n-1}\} = \eta_n'^* \eta_n', \quad (104)$$

となるから、これはすぐに積分でき、結果は

$$\mathcal{K}_2(0, T; 0, 0) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{\eta_0=0} \prod_{n=1}^{N-1} \frac{d\eta_n d\eta_n^*}{\pi} \exp\left(\frac{i}{\hbar} S_2^{CS}[\{\eta_n\}, \{\eta_n^*\}]\right) = 1, \quad (105)$$

である。この結果は経路積分を用いずに求めた結果と一致する。

4.4 ϵ 項の検証

連続形式で曖昧に考えられていたことは、前節で示した通り離散形式では存在せず論理的にもはっきりしている。したがって、Klauder の論文で述べている、 ϵ 項は停留作用を求める際には寄与しない、ということは離散形式においても正しいはずである。更に、揺らぎの積分は離散形式で正しく計算できた。したがって、揺らぎの積分を考えると、連続形式では無視されている ϵ 項を、含めない場合、含めた場合の双方を計算することによって、 ϵ 項が本当に無視できるのかを確かめることができる。

4.4.1 停留作用の検証

Hamiltonian が $\hbar\hat{a}^\dagger\hat{a}$ のとき、前節で求めた $\xi_n^S, \bar{\xi}_n^S$ を (48) に代入することにより ϵ 項が停留作用にきかないことを確かめる。 $\xi_n^S, \bar{\xi}_n^S$ と q_n^S, p_n^S の関係は (84), (85) である。

中間時刻における差 $q_n^S - q_{n-1}^S, p_n^S - p_{n-1}^S, (n = 2, \dots, N-1)$ は $O(\epsilon)$ であるから、 ϵ 項のうち中間時刻からの寄与は全体で $O(\epsilon)$ となり、きかない。次に両端にかかる項 ($q_F - q_{N-1}^S, q_1^S - q_I, p_F - p_{N-1}^S, p_1^S - p_I$ を含む項) を考察する。

$$(p_F - p_{N-1}^S)^2 + (q_F - q_{N-1}^S)^2 = p_F^2 + q_F^2 - 2\xi_F^* \xi_I e^{-it_{N-1}} - 2|\xi_F|^2 e^{i(t_{N-1}-T)} + 2\xi_F^* \xi_I e^{-iT} \rightarrow 0, \quad (\epsilon \rightarrow 0) \quad (106)$$

$$(p_1^S - p_I)^2 + (q_1^S - q_I)^2 = p_I^2 + q_I^2 - 2|\xi_I|^2 e^{-it_1} - 2\xi_F^* \xi_I e^{-i(t_1-T)} + 2\xi_F^* \xi_I e^{-iT} \rightarrow 0, \quad (\epsilon \rightarrow 0) \quad (107)$$

したがって、 ϵ 項が停留作用に寄与しないということが確かめられた。したがって、停留作用は残りの項から求まる。

$$\begin{aligned} \frac{i}{\hbar} S_{SAP}^{CS} &= \frac{i}{2} \sum_{n=1}^N (q_n^S p_{n-1}^S - p_n^S q_{n-1}^S) - \frac{i\epsilon}{2} \{p_n^S p_{n-1}^S + q_n^S q_{n-1}^S + i(q_n^S p_{n-1}^S - p_n^S q_{n-1}^S)\} \\ &\simeq -\frac{1}{4}(p_F^2 + p_I^2 + q_F^2 + q_I^2) + \frac{1}{2}\{p_F p_I + q_F q_I + i(q_F p_I - p_F q_I)\} e^{-iT}. \end{aligned} \quad (108)$$

停留作用がもとの正しい遷移振幅を導出するということが分かったので、揺らぎに関する積分は 1 の筈である。つまり、停留作用に対して ϵ 項は寄与しないので連続極限において落とすことができる。しかし、 q_n, p_n を停留作用経路のまわりで展開したときに、揺らぎに関しての計算の際に ϵ 項も考慮に入れるべきかどうかは自明ではない。したがって、(48) の各項に対してそれを調べる。

4.4.2 揺らぎの検証

q_n, p_n を停留作用のまわりで展開する。

$$q_n = q_n^S + q_n, \quad (109)$$

$$p_n = p_n^S + p_n, \quad 1 \leq n \leq N-1. \quad (110)$$

(109), (110) を (48) に代入し、揺らぎに関して 2 次の項をそれぞれ、 ϵ 項、位相項、Hamiltonian 項に対応して、 $S_2^\epsilon, S_2^P, S_2^H$ 、とすると、次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{i}{\hbar} S_2^\epsilon &= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N-1} (p_n^2 - p_n p_{n-1} + q_n^2 - q_n q_{n-1}). \\ \frac{i}{\hbar} S_2^P &= \frac{i}{2} \sum_{n=2}^{N-1} (q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1}). \\ \frac{i}{\hbar} S_2^H &= -\frac{i\epsilon}{2} \sum_{n=2}^{N-1} \{p_n p_{n-1} + q_n q_{n-1} + i(q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1})\}. \end{aligned} \quad (111)$$

ただし、 $q_0 = p_0 = 0$ と定義した。もし ϵ 項が揺らぎに寄与しないのであれば、上の S_2^P と S_2^H だけの項に対する (q_n, p_n) の積分が 1 でなくてはならない。しかし、付録 A から、これだけではこの積分は 1 にならず、結果は

$$\int \prod_{n=1}^{N-1} \frac{dq_n dp_n}{2\pi} \exp \left[\frac{i}{\hbar} (S_2^P + S_2^H) \right] = 2^{N-1} e^{iT}, \quad (112)$$

である。これは $N \rightarrow \infty$ の極限で発散している。 ϵ 項から生ずる S_2^ϵ も考慮に入れると、積分は

$$\int \prod_{n=1}^{N-1} \frac{dq_n dp_n}{2\pi} \exp \left[\frac{i}{\hbar} (S_2^P + S_2^\epsilon + S_2^H) \right] = 1, \quad (113)$$

となる。したがって、揺らぎの計算においては ϵ 項は無視してはならず、それも考慮に入れて揺らぎを求めなくてはならないという重要な結論が得られた。

5 連続形式におけるスピンコヒーレント状態の問題

スピンコヒーレント状態経路積分は、コヒーレント状態経路積分と構造が似ており、連続形式における問題はそのまま存在する。実際に答えの分かる問題を例に、遷移振幅が連続形式で答えが導出できるのかを確かめる。

スピンコヒーレント状態 [12] は次のように定義される。

$$|\xi\rangle = \exp \left[-\zeta^* \hat{S}_+ + \zeta \hat{S}_- \right] |S\rangle, \quad \zeta = e^{i\phi} \frac{\theta}{2}. \quad (114)$$

ここで、 \hat{S}_\pm は昇降演算子であり、スピン演算子 \hat{S}_i , ($i = x, y, z$) から、 $\hat{S}_\pm = \hat{S}_x \pm i\hat{S}_y$ と構成される。また、 $|S\rangle$ は \hat{S}_z の固有状態で $\hat{S}_z|S\rangle = S|S\rangle$ である。これから、少し変形をすると次のように書くことができる。

$$|\xi\rangle = (1 + |\xi|^2)^{-S} \sum_{M=-S}^S \left(\frac{(2S)!}{(S-M)!(S+M)!} \right)^{1/2} \xi^{S-M} |M\rangle. \quad (115)$$

ここで、

$$\xi \equiv e^{i\theta} \tan \frac{\theta}{2}, \quad (116)$$

で、 $|M\rangle$ は \hat{S}_z の固有状態である。 $(\hat{S}_z|M\rangle = M|M\rangle)$ これから、一般に

$$e^{i\hat{S}_z T} |\xi\rangle = e^{iST} |\xi e^{-iT}\rangle \quad (117)$$

で、遷移振幅は $\hat{H} = -\hbar \hat{S}_z$ のとき

$$\begin{aligned} \langle \xi_F | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} T} | \xi_I \rangle &= e^{iST} \langle \xi_F | \xi_I e^{-iT} \rangle \\ &= \frac{e^{iST}}{(1 + |\xi_F|^2)^S (1 + |\xi_I|^2)^S} (1 + \xi_F^* \xi_I e^{-iT})^{2S}, \end{aligned} \quad (118)$$

となる。

5.1 境界条件、停留作用、揺らぎ

連続形式における経路積分形式は

$$\langle \xi_F | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} T} | \xi_I \rangle = \int_{SCS} \mathcal{D}\xi \mathcal{D}\xi^* \exp \left(\frac{i}{\hbar} S_{SCS}[\xi, \xi^*] \right). \quad (119)$$

で与えられる。[3][4][5] ここで Hamiltonian $\hat{H} = -\hbar \hat{S}_z$ を考えると、作用は

$$S_{SCS} = \int_0^T dt \left\{ \frac{i\hbar S}{1 + |\xi(t)|^2} \left(\xi^*(t) \dot{\xi}(t) - \dot{\xi}^*(t) \xi(t) \right) + \hbar S \frac{1 - |\xi(t)|^2}{1 + |\xi(t)|^2} \right\}, \quad (120)$$

である。これから、停留作用経路がしたがう微分方程式は

$$\dot{\xi}^S(t) = -i\xi(t), \quad (121)$$

$$\dot{\xi}^S(t) = i\xi(t), \quad (122)$$

となり、形式的に Hamiltonian が調和振動子の場合の CSPI と同じ形の微分方程式である。したがって、境界条件に関する曖昧性がここでも存在する。正しい境界条件を選ぶと停留作用経路は (38)(39) で与えられる。これを作用 (120) に代入すると、

$$\begin{aligned} S_{SAP}^{SCS} &\equiv S_{SCS}[\xi^S, \bar{\xi}^S] \\ &= \int_0^T dt \left\{ \frac{i\hbar S}{1 + \bar{\xi}^S(t)\xi^S(t)} \left(\bar{\xi}^S(t)\dot{\xi}^S(t) - \dot{\bar{\xi}}^S(t)\xi^S(t) \right) + \hbar S \frac{1 - \bar{\xi}^S(t)\xi^S(t)}{1 + \bar{\xi}^S(t)\xi^S(t)} \right\} \\ &= -i\hbar ST, \end{aligned} \quad (123)$$

となり、この場合も任意の ξ_I, ξ_F のときの遷移振幅を求める際に得られる停留作用の値と異なる。CSPI の場合と同様に揺らぎを計算すると

$$S_2^{SCS}[\eta, \eta^*] = \frac{2i\hbar S}{(1 + \bar{\xi}^S(t)\xi^S(t))^2} \int_0^T dt \eta^*(t) \left(\frac{d}{dt} + i \right) \eta(t), \quad (124)$$

となるから、揺らぎの積分は

$$\int \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\eta^* \exp \left(\frac{i}{\hbar} S_2^{SCS} \right) \propto \left(\det \left(\frac{d}{dt} + i \right) \right)^{-1}, \quad (125)$$

となり、この \det は計算できない。

以上みてきたように、一貫して連続形式で計算を進めると CSPI の場合とまったく同じ問題が生じている。ここでも同様に、次節では停留作用近似の方法を連続形式で扱う為の Klauder の処方箋を簡単に紹介するしかし、SCSPI の場合は連続形式に移行する際に問題があるということも述べる。

5.2 Klauder's 処方箋, ϵ 項

CSPI の場合と同様に SCSPI において、停留作用近似の方法を形式的に連続形式で扱う為の Klauder の処方箋を簡単に紹介する。 ϵ 項とは、CSPI の場合 $\Delta p_n, \Delta q_n$ の 2 次の項であった。その時、経路積分を導出する際に差に関して展開しなくても、作用は (48) のように最初から差の形で書かれていた。しかし SCSPI の場合は、CSPI の場合の p, q の代わりに、 $\xi = e^{i\phi} \tan \theta/2$ の関係から作用は θ, ϕ に関する差 $\Delta\theta \equiv \theta_n - \theta_{n-1}, \Delta\phi_n \equiv \phi_n - \phi_{n-1}$ の形で書かれていない。したがって、 ϵ 項というものは、最初から存在しない。これを示す為、 θ, ϕ 表示で厳密な経路積分に現れる作用を書くとき次のようになる。

$$\begin{aligned} S_{SCS}[\{\theta_n\}, \{\phi_n\}] &= \sum_{n=1}^N \left\{ -2i\hbar S \ln \left(\cos \frac{\theta_n}{2} \cos \frac{\theta_{n-1}}{2} + e^{-i(\phi_n - \phi_{n-1})} \sin \frac{\theta_n}{2} \sin \frac{\theta_{n-1}}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \epsilon \mathcal{H}(\theta_n, \theta_{n-1}, \phi_n, \phi_{n-1}) \right\}, \end{aligned} \quad (126)$$

である。ここで

$$\mathcal{H}(\theta_n, \theta_{n-1}, \phi_n, \phi_{n-1}) \equiv \frac{\langle \theta_n, \phi_n | \hat{H} | \theta_{n-1}, \phi_{n-1} \rangle}{\langle \theta_n, \phi_n | \theta_{n-1}, \phi_{n-1} \rangle}, \quad (127)$$

であり、CS の場合と同じように θ_n, ϕ_n に関して対角形になっていないことに注意しよう。これからも、分かるように (126) は θ, ϕ に関して差の形で書かれていない。したがって、連続形式に移行する為にはこの段階で差に関して展開する必要がある。しかし、CSPI の場合と同様、差 $\Delta\theta_n = \Delta\phi_n = O(\epsilon)$ である指標は存在しない。仮にそうだと思って、2 次まで展開すると次のようになる。

$$\begin{aligned} S_{SCS} &\simeq \sum_{n=1}^N \left[\frac{i\hbar S}{4} \{ (\theta_n - \theta_{n-1})^2 + (\phi_n - \phi_{n-1})^2 \sin^2 \theta_n \} \right. \\ &\quad \left. + \hbar S \left\{ (\phi_n - \phi_{n-1})(\cos \theta_n - 1) - \frac{1}{2}(\theta_n - \theta_{n-1})(\phi_n - \phi_{n-1}) \sin \theta_n \right\} - \epsilon \mathcal{H}(\theta_n, \theta_{n-1}, \phi_n, \phi_{n-1}) \right], \end{aligned} \quad (128)$$

差に関して1次までを取り、連続形式に移行したのが通常用いられている作用であり、Hamiltonian は θ, ϕ に関して対角形になる。CSPI の場合と同様に差に関して2次の項を残して連続形式に移行すると次のようになる。

$$S_{SCS} \rightarrow \int_0^T dt \left[\frac{i\hbar S}{4} \epsilon \{ \dot{\theta}^2(t) + \sin \theta(t) \dot{\phi}^2(t) \} + \hbar S \{ \dot{\phi}(t) (\cos \theta(t) - 1) - \frac{\epsilon}{2} \dot{\theta}(t) \dot{\phi}(t) \sin \theta(t) \} - H(\theta(t), \phi(t)) \right]. \quad (129)$$

このように、形式的に連続形式に移行すれば境界条件に関する曖昧性は回避できる。しかし、Klauder の論文では $\epsilon \dot{\theta} \dot{\phi} \sin \theta / 2$ の項がない。2次の項までを残すのであれば、この項も残されるべきである。更に停留作用が正しく求められるかどうかは、一般に Hamiltonian のある場合、Klauder はきちんと述べていない。しかし、 ϵ 項が停留作用に寄与しないということは述べている。SCSPI に関する連続形式における Klauder の処方箋は CSPI と違って曖昧なところが多く存在するので、これを無批判に用いるのは躊躇いがある。これらのことをはっきりさせる為にも、やはり離散形式でちゃんと計算してみる必要がある。そこで、停留作用が正しく計算できるのか、揺らぎの積分が正しくできるのか、この2つに関して調べる。

6 離散形式におけるスピンコヒーレント状態経路積分

CSPI の場合と同様に、一貫して離散形式で議論を進めていくことによって、連続形式の問題を全て解決する。

6.1 経路積分公式

ξ 表示における遷移振幅は

$$\mathcal{K}_{SCS}(\xi_F, T; \xi_I, 0) = \langle \xi_F | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} T} | \xi_I \rangle, \quad (130)$$

である。ここで、完全性関係

$$\int \frac{2S+1}{\pi} \frac{d\xi d\xi^*}{(1+|\xi|^2)^2} |\xi\rangle \langle \xi| = 1, \quad (131)$$

を右辺に各時間間隔毎に挿入し変形すると、離散形式における SCSPI が得られる。

$$\mathcal{K}_{SCS}(\xi_F, T; \xi_I, 0) = \langle \xi_F | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} T} | \xi_I \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{n=1}^{N-1} \frac{2S+1}{\pi} \frac{d\xi_n d\xi_n^*}{(1+|\xi_n|^2)^2} \exp \left(\frac{i}{\hbar} S_{SCS}[\{\xi_n^*\}, \{\xi_n\}] \right) \quad (132)$$

$$\begin{aligned} \frac{i}{\hbar} S_{SCS}[\{\xi_n^*\}, \{\xi_n\}] &= \sum_{n=1}^N \left[S \ln \frac{(1+\xi_n^* \xi_{n-1})^2}{(1+|\xi_n|^2)(1+|\xi_{n-1}|^2)} - \frac{i}{\hbar} \epsilon \mathcal{H}(\xi_n^*, \xi_{n-1}) \right] \\ &= S \{ \ln(1+|\xi_F|^2) - \ln(1+|\xi_I|^2) \} + \sum_{n=1}^N \left[2S \ln \frac{1+\xi_n^* \xi_{n-1}}{1+\xi_n^* \xi_n} - \frac{i}{\hbar} \epsilon \mathcal{H}(\xi_n^*, \xi_{n-1}) \right] \end{aligned} \quad (133)$$

$$\mathcal{H}(\xi_n^*, \xi_{n-1}) \equiv \frac{\langle \xi_n | \hat{H} | \xi_{n-1} \rangle}{\langle \xi_n | \xi_{n-1} \rangle}, \quad (134)$$

ここで、 $\epsilon \equiv T/N$, $\xi_N \equiv \xi_F$, $\xi_0 \equiv \xi_I$ である。

これから、具体的な計算を行う。

6.2 停留作用近似

コヒーレント状態の場合と同様に、それぞれ $N-1$ 個の変数 ξ_n, ξ_n^* に関して (133) を変分し、停留作用経路がしたがう差分方程式を求め、具体的な Hamiltonian に対して解を求める。

前章で注意したように、両端を含む項に注意してそれぞれの変数に関して変分すると

$$\left. \frac{i}{\hbar} \frac{\delta \mathcal{S}_{SCS}}{\delta \xi_n^*} \right|_S = \left(-2S \frac{\xi_n - \xi_{n-1}}{(1 + \xi_n^* \xi_{n-1})(1 + \xi_n^* \xi_n)} - \frac{i}{\hbar} \epsilon \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_n^*} \right) \Big|_S = 0, \quad n = 2, \dots, N-1. \quad (135)$$

$$\left. \frac{i}{\hbar} \frac{\delta \mathcal{S}_{SCS}}{\delta \xi_1^*} \right|_S = \left(-2S \frac{\xi_1 - \xi_I}{(1 + \xi_1^* \xi_I)(1 + \xi_1^* \xi_1)} - \frac{i}{\hbar} \epsilon \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_1^*} \right) \Big|_S = 0. \quad (136)$$

$$\left. \frac{i}{\hbar} \frac{\delta \mathcal{S}_{SCS}}{\delta \xi_{n-1}} \right|_S = \left(2S \frac{\xi_n^* - \xi_{n-1}^*}{(1 + \xi_n^* \xi_{n-1})(1 + \xi_{n-1}^* \xi_{n-1})} - \frac{i}{\hbar} \epsilon \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_{n-1}} \right) \Big|_S = 0, \quad n = 2, \dots, N-1. \quad (137)$$

$$\left. \frac{i}{\hbar} \frac{\delta \mathcal{S}_{SCS}}{\delta \xi_{N-1}} \right|_S = \left(2S \frac{\xi_F^* - \xi_{N-1}}{(1 + \xi_F^* \xi_{N-1})(1 + \xi_{N-1}^* \xi_{N-1})} - \frac{i}{\hbar} \epsilon \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_{N-1}} \right) \Big|_S = 0, \quad (138)$$

となる。ここで、便宜上変数ではないけれども

$$\xi_0^S \equiv \xi_I \quad (139)$$

$$\bar{\xi}_N^S \equiv \xi_F^* \quad (140)$$

と定義すれば (136)、(138) を (135)、(137) に吸収することができる。すなわち、(135) は $n = 1, \dots, N-1$ に対して、(137) は $n = 2, \dots, N$ に対して成り立つ。

具体的に問題を考える為、実際に答えの分かる Hamiltonian として

$$\hat{H} = -\hbar \hat{S}_z, \quad (141)$$

を選ぶ。このとき $\mathcal{H}(\xi_n^*, \xi_{n-1})$ は

$$\mathcal{H}(\xi_n^*, \xi_{n-1}) = -\hbar S \frac{1 - \xi_n^* \xi_{n-1}}{1 + \xi_n^* \xi_{n-1}}, \quad (142)$$

である。したがって差分方程式は

$$\frac{\xi_n^S - \xi_{n-1}^S}{1 + \bar{\xi}_n^S \xi_n^S} = -i\epsilon \frac{\xi_{n-1}^S}{1 + \bar{\xi}_n^S \xi_{n-1}^S}, \quad n = 1, \dots, N-1, \quad (143)$$

$$\frac{\bar{\xi}_n^S - \bar{\xi}_{n-1}^S}{1 + \bar{\xi}_{n-1}^S \xi_{n-1}^S} = i\epsilon \frac{\bar{\xi}_n^S}{1 + \bar{\xi}_n^S \xi_{n-1}^S}, \quad n = 2, \dots, N, \quad (144)$$

となる。これから

$$\xi_n^S - \xi_{n-1}^S = O(\epsilon), \quad n = 1, \dots, N-1 \quad (145)$$

$$\bar{\xi}_n^S - \bar{\xi}_{n-1}^S = O(\epsilon), \quad n = 2, \dots, N \quad (146)$$

である。 ξ_N^S や $\bar{\xi}_0^S$ はどこにも現れないことに注意しよう。つまり

$$\xi_F - \xi_{N-1}^S \neq O(\epsilon), \quad (147)$$

$$\bar{\xi}_1^S - \xi_I^* \neq O(\epsilon), \quad (148)$$

である。上の方程式を解く為に、以下に示す保存量の存在に注目する。

$$P_n \equiv \bar{\xi}_n^S \xi_{n-1}^S, \quad (149)$$

$$R_n \equiv \bar{\xi}_n^S \xi_n^S, \quad (150)$$

と置けば

$$(143) \times \bar{\xi}_n^S, (144) \times \xi_{n-1}^S$$

から

$$\frac{R_n - P_n}{1 + R_n} = -i\epsilon \frac{P_n}{1 + P_n}, \quad 1 \leq n \leq N-1, \quad (151)$$

$$\frac{P_n - R_{n-1}}{1 + R_{n-1}} = i\epsilon \frac{P_n}{1 + P_n}, \quad 2 \leq n \leq N, \quad (152)$$

を得る。この2式を加え変形すると

$$\frac{1 + P_n}{1 + R_{n-1}} = \frac{1 + P_n}{1 + R_n}, \quad 2 \leq n \leq N-1, \quad (153)$$

となる。ここで、 $P_n = -1$ のときは (133) から \mathcal{S}_{SCS} は零になる。したがって、このような値になる停留作用経路はきかないので $P_n \neq -1$ とすることができる。よって

$$R_n = R_{n-1} \equiv R, \quad 2 \leq n \leq N-1, \quad (154)$$

となり、 R_n は保存量である。つまり

$$R_n = R, \quad 1 \leq n \leq N-1, \quad (155)$$

である。これを (151) に代入すると

$$\frac{R - P_n}{1 + R} = -i\epsilon \frac{P_n}{1 + P_n}, \quad 1 \leq n \leq N-1, \quad (156)$$

となるから、 P_n も保存量である。これから P_n を求めると

$$P_n = -\frac{1 - R - i\epsilon(1 + R)}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\{1 - R - i\epsilon(1 + R)\}^2 + 4R} \equiv P_{\pm}(R), \quad 1 \leq n \leq N-1, \quad (157)$$

となる。これを $O(\epsilon)$ までで近似すると

$$P_{\pm}(R) = \begin{cases} R(1 + i\epsilon) \equiv P \\ -(1 - i\epsilon) \end{cases} \quad (158)$$

となるが、 $P_-(R)$ は $P \neq -1$ の条件から落とすことができる。これを (143)、(144) に代入すると、差分方程式は $O(\epsilon)$ までの近似で

$$\xi_n^S - \xi_{n-1}^S = -i\epsilon \xi_{n-1}^S, \quad 1 \leq n \leq N-1, \quad (159)$$

$$\bar{\xi}_n^S - \bar{\xi}_{n-1}^S = i\epsilon \bar{\xi}_n^S, \quad 2 \leq n \leq N, \quad (160)$$

となる。この差分方程式は前章の調和振動子と同じであり簡単に解くことができ解は

$$\xi_n^S = \xi_I(1 - i\epsilon)^n \simeq \xi_I e^{-it_n}, \quad 0 \leq n \leq N-1, \quad (161)$$

$$\bar{\xi}_n^S = \xi_F^*(1 - i\epsilon)^{N-n} \simeq \xi_F^* e^{i(t_n - T)}, \quad 1 \leq n \leq N, \quad (162)$$

$$t_n \equiv n\epsilon$$

である。この解の形は形式的に前章で考察した解と同じである。前章では $\xi_F = \xi_I e^{-iT}$ のとき停留作用経路は実数で、Hamiltonian が調和振動子の場合であるから、位相空間でみれば軌道は円軌道を描いていた。今の場合は z 軸方向に磁場をかけたときのスピンの運動を考察しているのであるから、終点が $\xi_F = \xi_I e^{-iT}$ のときのみ、停留作用経路は z 軸のまわりで古典的な歳差運動を表わす。しかし、一般には軌道は実数とは限らず ξ_n^S と $\bar{\xi}_n^S$ は互いに複素共役ではない。(図2) また R, P は

$$R = \bar{\xi}_n^S \xi_n^S = \xi_F^* \xi_I (1 - i\epsilon)^N \simeq \xi_F^* \xi_I e^{-iT}, \quad (163)$$

$$P = \bar{\xi}_n^S \xi_{n-1}^S = R(1 - i\epsilon)^{-1} \simeq \xi_F^* \xi_I e^{-iT + i\epsilon}, \quad (164)$$

となる。

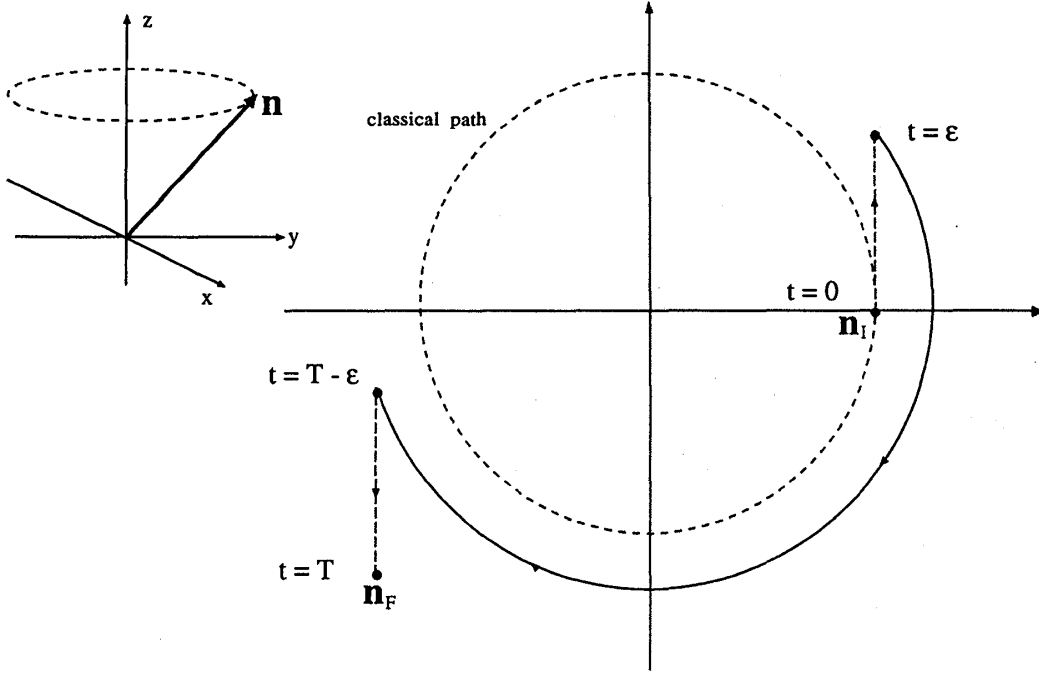


Figure 2: スピンの先端を上からみた図。前章と同様に始点、終点の両端でとびが生ずる。軌道は実数部分である。

6.3 停留作用と揺らぎ

停留作用経路が求まったので ξ_n , ξ_n^* を停留作用経路と揺らぎに分ける。

$$\xi_n = \xi_n^S + \eta_n. \quad (165)$$

$$\xi_n^* = \bar{\xi}_n^S + \eta_n^*. \quad (166)$$

ここで、(139),(140) から $\eta_0 = \eta_N^* = 0$ である。これを (133) に代入する。

$$S_{SCS}[\{\xi_n^*\}, \{\xi_n\}] \simeq S_{SAP}^{SCS} + S_2^{SCS}[\{\eta_n^*\}, \{\eta_n\}] \quad (167)$$

$$\begin{aligned} \frac{i}{\hbar} S_{SAP}^{SCS} &\equiv \frac{i}{\hbar} S^{SCS}[\{\bar{\xi}_n^S\}, \{\xi_n^S\}] \\ &= -S \ln(1 + |\xi_F|^2)(1 + |\xi_I|^2) + S \left[2N \ln(1 + P) - 2(N-1) \ln(1 + R) \right. \\ &\quad \left. + i(N-1)\epsilon \frac{1-P}{1+P} + i\epsilon \frac{1 - \xi_F^* \xi_{N-1}^S}{1 + |\xi_F|^2} \right]. \end{aligned} \quad (168)$$

$\ln(1+P)$ には N がかかっているから、 P としては $O(\epsilon)$ まで残した式 (164) を代入せねばならない。したがって

$$\begin{aligned} \frac{i}{\hbar} S_{SAP}^{SCS} &\simeq -S \ln(1 + |\xi_F|^2)(1 + |\xi_I|^2) + S \left[2N \ln(1 + R) + 2i\epsilon N \frac{R}{1+R} \right. \\ &\quad \left. - 2(N-1) \ln(1 + R) + iN\epsilon \frac{1-R}{1+R} \right] \\ &= iST + S \ln \frac{(1+R)^2}{(1 + |\xi_F|^2)(1 + |\xi_I|^2)}, \end{aligned} \quad (169)$$

となる。 $\ln(1+R)$ の前の N はキャンセルしたから、 R には $O(\epsilon^0)$ までの式 (163) を用いてよい。したがって

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar}S_{SAP}^{SCS}\right) = \frac{e^{iST}}{(1+|\xi_F|^2)^S(1+|\xi_I|^2)^S}(1+\xi_F^*\xi_I e^{-iT})^{2S} \quad (170)$$

となる。 $\frac{i}{\hbar}S_2^{SCS}[\{\eta_n^*\}, \{\eta_n\}]$ は (付録 C 参照。)

$$\begin{aligned} \frac{i}{\hbar}S_2^{SCS}[\{\eta_n^*\}, \{\eta_n\}] &= \frac{S}{(1+P)^2} \sum_{n=1}^{N-1} \left[-2 \left(\frac{1+P}{1+R} \right)^2 \eta_n^* \eta_n + 2\eta_n^* \eta_{n-1} - 2i\epsilon \frac{1-P}{1+P} \eta_n^* \eta_{n-1} \right] \\ &= -\frac{2S}{(1+R)^2} \sum_{n=1}^{N-1} \left[\eta_n^* \eta_n - \left(\frac{1+R}{1+P} \right)^2 (1-i\epsilon) \eta_n^* \eta_{n-1} \right], \end{aligned} \quad (171)$$

となる。ゆえに実効的に $\eta_n, \eta_n^* = O(S^{-1/2})$ である。

遷移振幅は

$$\langle \xi_F | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} T} | \xi_I \rangle \simeq \exp\left(\frac{i}{\hbar}S_{SAP}^{SCS}\right) \mathcal{K}_2^{SCS}(0, T; 0, 0), \quad (172)$$

となる。ただし

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_2^{SCS}(0, T; 0, 0) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{n=1}^{N-1} \frac{2S+1}{\pi} \frac{d\eta_n d\eta_n^*}{(1+(\xi_n^S + \eta_n)(\xi_n^S + \eta_n))^2} \exp\left(\frac{i}{\hbar}S_2^{SCS}[\{\eta_n^*\}, \{\eta_n\}]\right) \\ &\simeq \lim_{N \rightarrow \infty} \int \prod_{n=1}^{N-1} \frac{2S}{\pi} \frac{d\eta_n d\eta_n^*}{(1+R)^2} \exp\left(\frac{i}{\hbar}S_2^{SCS}[\{\eta_n^*\}, \{\eta_n\}]\right) \end{aligned} \quad (173)$$

である。ここで右辺第 2 式に移行する際に、 $\eta_n, \eta_n^* = O(S^{-1/2})$ であることを考慮して、積分測度から来る $O(S^0)$ の寄与は落とした。次に揺らぎに関する積分を考える。

$$\eta_n'^* = \eta_n^*, \quad (174)$$

$$\eta_n' = \eta_n - \left(\frac{1+R}{1+P} \right)^2 (1-i\epsilon) \eta_n^* \eta_{n-1}, \quad (175)$$

と独立に変換すれば

$$\begin{aligned} &\int \frac{2S}{\pi} \frac{d\eta_n d\eta_n^*}{(1+R)^2} \exp\left[-\frac{2S}{(1+R)^2} \left\{ \eta_n^* \eta_n - \left(\frac{1+R}{1+P} \right)^2 (1-i\epsilon) \eta_n^* \eta_{n-1} \right\}\right] \\ &= \int \frac{2S}{\pi} \frac{d\eta_n' d\eta_n'^*}{(1+R)^2} \exp\left[-\frac{2S}{(1+R)^2} \eta_n'^* \eta_n'\right] \\ &= 1, \end{aligned} \quad (176)$$

となるから、結局

$$\mathcal{K}_2^{SCS}(0, T; 0, 0) = 1, \quad (177)$$

となる。したがって遷移振幅は

$$\begin{aligned} \langle \xi_F | e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} T} | \xi_I \rangle &= \exp\left(\frac{i}{\hbar}S_{SAP}^{SCS}\right) \mathcal{K}_2^{SCS}(0, T; 0, 0) \\ &= \frac{e^{iST}}{(1+|\xi_F|^2)^S(1+|\xi_I|^2)^S}(1+\xi_F^*\xi_I e^{-iT})^{2S}, \end{aligned} \quad (178)$$

となる。これは経路積分を使わずに求めた値と一致する。

6.4 ϵ 項の検証

SCSPI は CSPI より、事情は複雑であった。その一番の原因は次のことである。CSPI の場合は離散形式で経路積分導出して連続形式に移行する過程で、作用を離散変数 ξ_n, ξ_n^* (もしくは q_n, p_n) の差に関して式を展開していない。これに対し SCSPI では、連続形式に移行する為に作用を ξ_n, ξ_n^* (もしくは θ_n, ϕ_n) の差に関して展開する必要がある。したがって、CSPI では ϵ 項が停留作用に寄与しないという結果は妥当だとしても、SCSPI の場合はすでに差に関して展開した形 (そうでないと ϵ 項なる概念は存在しない) で、 ϵ 項が停留作用に寄与しないということは、両端の オーダー 1 のとびを考慮に入れていないという点で疑問である。しかし、Klauder によれば、 ϵ 項は停留作用に寄与しないと述べている。したがって、この節では、CSPI の場合と同様に通常用いられている連続形式における作用に、停留作用経路の解を代入することによって、正しい結果が得られるかを確かめる。もし、正しい結果を得ることができないのであれば、SCSPI においては ϵ 項なる概念は存在し得ず、連続形式で議論することには疑念が生ずることになる。

6.4.1 停留作用の検証

$\xi_n^S, \bar{\xi}_n^S$ と θ_n^S, ϕ_n^S の関係は

$$\xi_n^S = e^{i\phi_n^S} \tan \frac{\theta_n^S}{2}, \quad (179)$$

$$\bar{\xi}_n^S = e^{-i\phi_n^S} \tan \frac{\theta_n^S}{2}, \quad 1 \leq n \leq N-1, \quad (180)$$

である。これから θ_n^S, ϕ_n^S を求めると以下ようになる。

$$\left(\tan \frac{\theta_n^S}{2} \right)^2 = \bar{\xi}_n^S \xi_n^S = R = e^{-i(\phi_F - \phi_I)} \tan \frac{\theta_F}{2} \tan \frac{\theta_I}{2} e^{-iT}. \quad (181)$$

$$e^{2i\phi_n^S} = \left(\frac{\xi_n^S}{\tan \frac{\theta_n^S}{2}} \right)^2 = \frac{(\xi_n^S)^2}{R}. \quad (182)$$

$$\phi_n^S = -\left(t_n - \frac{T}{2}\right) + \frac{1}{2}(\phi_F + \phi_I) - \frac{i}{2} \ln \frac{\tan \frac{\theta_I}{2}}{\tan \frac{\theta_F}{2}}. \quad (183)$$

$$1 \leq n \leq N-1.$$

これから、Klauder の論文の内容を確かめる為にこれらを (128) の S_{SCS} に代入する。ここで

$$\theta_n^S = 2 \tan^{-1} \sqrt{R} = \text{const.} \equiv \theta^S, \quad n = 1, \dots, N-1, \quad (184)$$

$$\phi_n^S - \phi_{n-1}^S = -\epsilon = O(\epsilon), \quad n = 2, \dots, N-1, \quad (185)$$

である。ここで、 $\phi_n^S - \phi_{n-1}^S$, ($n = 2, \dots, N-1$) は $O(\epsilon)$ なので、その 2 次の項は全体で $O(\epsilon)$ になるから消える。しかし、両端を含む項は $O(\epsilon)$ とは限らないから別に考える必要がある。停留作用は

$$\begin{aligned} \frac{i}{\hbar} S_{SAP}^{SCS} &\simeq -\frac{S}{4} \{ (\theta_F - \theta_{N-1}^S)^2 + (\theta_1^S - \theta_I)^2 + (\phi_F - \phi_{N-1}^S)^2 \sin^2 \theta_F + (\phi_1^S - \phi_I)^2 \sin^2 \theta_1^S \} \\ &+ iS \{ (\phi_F - \phi_{N-1}^S)(\cos \theta_F - 1) + (\phi_1^S - \phi_I)(\cos \theta_1^S - 1) \} \\ &+ iS \sum_{n=2}^{N-1} (\phi_n^S - \phi_{n-1}^S)(\cos \theta_n^S - 1) + i\epsilon S \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1-P}{1+P} + i\epsilon \frac{1 - \xi_F^* \xi_{N-1}^S}{1 + \xi_F^* \xi_{N-1}^S}, \end{aligned} \quad (186)$$

である。また、Hamiltonian の項は ξ 表示で

$$-\hbar S \frac{1 - \bar{\xi}_n^S \xi_{n-1}^S}{1 + \bar{\xi}_n^S \xi_{n-1}^S}, \quad (187)$$

であり、 $\xi_n^S \xi_{n-1}^S$ ($1 \leq n \leq N-1$) は一定値 P であったので上述のようになる。これより、各項に θ_n^S , ϕ_n^S を代入する。先ず、 ϵ 項の両端を含む項は次のようになる。

$$-\frac{S}{4}\{(\theta_F - \theta_{N-1}^S)^2\} = -\frac{S}{4}(\theta_F^2 - 2\theta_F\theta^S + (\theta^S)^2). \quad (188)$$

$$-\frac{S}{4}\{(\theta_1^S - \theta_I)^2\} = -\frac{S}{4}(\theta_I^2 - 2\theta_I\theta^S + (\theta^S)^2). \quad (189)$$

$$-\frac{S}{4}\{(\phi_F - \phi_{N-1}^S)^2 \sin^2 \theta_F\} = -\frac{S}{4}(\delta\phi_F)^2 \sin^2 \theta_F. \quad (190)$$

$$-\frac{S}{4}\{(\phi_1^S - \phi_I)^2 \sin^2 \theta_1^S\} = -\frac{S}{4}\left\{\frac{4R}{(1+R)^2}(\delta\phi_I)^2\right\}. \quad (191)$$

ここで

$$\delta\phi_F \equiv \phi_F - \phi_{N-1}^S = -\epsilon + \frac{T}{2} + \frac{1}{2}(\phi_F - \phi_I) + \frac{i}{2} \ln \frac{\tan \frac{\theta_I}{2}}{\tan \frac{\theta_F}{2}}, \quad (192)$$

$$\delta\phi_I \equiv \phi_1^S - \phi_I = -\epsilon + \frac{T}{2} + \frac{1}{2}(\phi_F - \phi_I) - \frac{i}{2} \ln \frac{\tan \frac{\theta_I}{2}}{\tan \frac{\theta_F}{2}} \quad (193)$$

である。これら両端の寄与がいずれも零でなく互いに相殺もしない。つまり、Klauder の述べている、「停留作用において ϵ 項は寄与しない」ということは誤りである。次に位相項の両端を計算する。

$$iS(\phi_F - \phi_{N-1}^S)(\cos \theta_F - 1) = iS(\cos \theta_F - 1)(\delta\phi_F). \quad (194)$$

$$iS(\phi_1^S - \phi_I)(\cos \theta_1^S - 1) = iS\left(\frac{2}{1+R}\right)(\delta\phi_I). \quad (195)$$

更に、位相項の中間、Hamiltonian の項は次のようになる。

$$iS \sum_{n=2}^{N-1} (\phi_n^S - \phi_{n-1}^S)(\cos \theta_n^S - 1) = -iS(N-2)\epsilon \frac{-2R}{1+R} \rightarrow iST \frac{2R}{1+R}, \quad (\epsilon \rightarrow 0). \quad (196)$$

$$i\epsilon S \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1-P}{1+P} + i\epsilon \frac{1-\xi_F^* \xi_{N-1}^S}{1+\xi_F^* \xi_{N-1}^S} \rightarrow iST \frac{1-R}{1+R}, \quad (\epsilon \rightarrow 0). \quad (197)$$

位相項の中間と Hamiltonian の項の和は iST になる。これが正しい結果と一致するのは $\xi_F = \xi_I e^{-iT}$ の場合に限る。

したがって、これらから、位相項、 ϵ 項、全てを考慮しても正しい結果は得られない。この原因は (128) のように最初から差、 $\theta_n - \theta_{n-1}$, $\phi_n - \phi_{n-1}$ に関して展開してしまった形に停留作用経路の解を代入してしまったからである。しかし、両端を含む差、 $\theta_F - \theta_{N-1}^S$, $\theta_1^S - \theta_I$, $\phi_F - \phi_{N-1}^S$, $\phi_1^S - \phi_I$ というのは微量とは限らないので、これらを含む項は展開してはならない。したがって、ここだけを展開しないで書くと停留作用 S_{SAP}^{SCS} は

$$\begin{aligned} \frac{i}{\hbar} S_{SAP}^{SCS} &\simeq 2S \ln \left(\cos \frac{\theta_F}{2} \cos \frac{\theta_{N-1}^S}{2} + e^{-i(\phi_F - \phi_{N-1}^S)} \sin \frac{\theta_F}{2} \sin \frac{\theta_{N-1}^S}{2} \right) \\ &\times \left(\cos \frac{\theta_1^S}{2} \cos \frac{\theta_I}{2} + e^{-i(\phi_1^S - \phi_I)} \sin \frac{\theta_1^S}{2} \sin \frac{\theta_I}{2} \right) \\ &+ \sum_{n=2}^{N-1} \left[-\frac{S}{4}\{(\theta_n^S - \theta_{n-1}^S)^2 + (\phi_n^S - \phi_{n-1}^S)^2 \sin^2 \theta_n^S\} \right. \\ &+ iS \left\{ (\phi_n^S - \phi_{n-1}^S)(\cos \theta_n^S - 1) - \frac{1}{2}(\theta_n^S - \theta_{n-1}^S)(\phi_n^S - \phi_{n-1}^S) \sin \theta_n^S \right\} \\ &\left. - \frac{i}{\hbar} \epsilon \sum_{n=1}^N \mathcal{H}(\theta_n^S, \theta_{n-1}^S, \phi_n^S, \phi_{n-1}^S) \right] \end{aligned} \quad (198)$$

である。この右辺第1項は展開していないので、Klauder のいう ϵ 項、位相項に相当するものはすべて含まれている。上の式に停留作用経路の解を代入し、実際に正しい結果を導出できるかを確かめる。詳細な計算は付録 B 譲り、結果は

$$\frac{i}{\hbar} S_{SAP}^{SCS} = iST + 2S \ln \left(\cos \frac{\theta_F}{2} \cos \frac{\theta_I}{2} + e^{-i(\phi_F - \phi_I)} \sin \frac{\theta_F}{2} \sin \frac{\theta_I}{2} e^{-iT} \right), \quad (199)$$

となり、(118) と一致し正しい結果を導出することができた。これで、Klauder の論文に関してスピンコヒーレント状態経路積分の項目は誤りであるということが分かった。次に θ, ϕ 表示で揺らぎを考えるとそれは1となる。しかし、それは、CSPI の場合厳密な離散形式の表式から揺らぎの積分が正しく計算できたことの理由から、差に関して展開していない (126) の厳密な離散形式から求めなくてはならない。(詳細は付録 C,D を参照。)

7 concluding remarks

(S)CSPI に関する連続形式に対する問題点を議論した。その結果、CSPI においては ϵ 項は停留作用には寄与せず正しい停留作用が求められたけれども、それを無視して揺らぎの積分を行うと間違った結果が得られてしまうということが分かった。したがって、連続形式において通常無視されている ϵ 項は、揺らぎの積分を計算するときは無視してはいけない。SCSPI においては、事情はもっと困難である。 ϵ 項なるものが存在する為には、厳密な離散形式を積分変数の差に関して2次まで展開しなくてはならない。そして、この2次の項が ϵ 項である。しかし、 ϵ 項が停留作用には寄与しないというのは誤りで、しかも全ての項を考慮に入れても正しく停留作用を求めることはできない。揺らぎに関しても、展開した作用から求めたのでは間違ってしまう。したがって、SCSPI においては差に関して展開していない厳密な離散形式で計算を進めていく必要がある。つまり、 ϵ 項なるものは存在し得ず、形式的に連続形式で議論を進めることはできないという結論に至る。

(S)CSPI に関して、最後にもう一つ問題であろうと思われることを簡単に述べておく。

PSPI の場合、運動量 p の積分を行った結果、Feynman 経路積分が得られ、連続形式で作用は Lagrangian を時間積分した形に書くことができた。この時、作用には運動量座標は含まれていない。ある物理系を考察するときに、このように運動量座標を先に積分して、有効作用を求めることは良く行われていることである。同様のことを (S)CSPI に関しても行われている。SCSPI を例にして述べると、スピンのトンネル [7] を考察する時に、スピンベクトルの角度に対応する座標 θ, ϕ のどちらかを先に積分することによって、1変数に関する有効作用を求めて、スピンのトンネル確率を、座標の場合と同様に Instanton 法によって求めている。このような一連の計算過程がはたして妥当なものであるか、今回の連続形式に関する問題点を考えれば疑問である。もともと、SCSPI は状態間遷移振幅を計算す為のものであって、Feynman 核を計算するものではない。したがって、積分する変数の数は違うのである。SCSPI はどちらかの変数を積分してしまっても、有効作用には両端の値が残っているのである。したがって、厳密に離散形式で計算を行えば、有効作用が今まで議論されてきた形であるという保証はないということが考えられる。

本修士論文を遂行するに当たり、高木伸助教授には研究に対する姿勢、方法等、様々なことを学ばせて頂きました。その過程において的確な助言をいただき、心から感謝致します。

A CSPI における揺らぎの計算

CSPI における揺らぎの計算を行う。

$$\frac{i}{\hbar} S_2^P = \frac{i}{2} \sum_{n=2}^{N-1} (q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1}). \quad (200)$$

$$\frac{i}{\hbar} S_2^\epsilon = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N-1} (p_n^2 - p_n p_{n-1} + q_n^2 - q_n q_{n-1}). \quad (201)$$

$$\frac{i}{\hbar} S_2^{\mathcal{H}} = -\frac{i\epsilon}{2} \sum_{n=2}^{N-1} \{p_n p_{n-1} + q_n q_{n-1} + i(q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1})\}. \quad (202)$$

$$q_0 = q_N = p_0 = p_N = 0. \quad (203)$$

ϵ 項に関する以外の項のみで、揺らぎの計算を行う。

$$\begin{aligned} \frac{i}{\hbar}(S_2^P + S_2^H) &= \frac{i}{2} \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ (1-i\epsilon)(q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1}) - \epsilon \sum_{n=1}^N (p_n p_{n-1} + q_n q_{n-1}) \right\} \\ &= \frac{i}{2} [{}^t \mathbf{q} \ {}^t \mathbf{p}] \mathcal{M}^{PH} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (204)$$

ここで、

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_{N-1} \\ p_1 \\ \vdots \\ p_{N-1} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{M}^{PH} \equiv \begin{bmatrix} \mathcal{A}^{PH} & \mathcal{B}^{PH} \\ -\mathcal{B}^{PH} & \mathcal{A}^{PH} \end{bmatrix}, \quad (205)$$

$$\mathcal{A}^{PH} \equiv -\frac{\epsilon}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & 0 & \ddots & 1 \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}^{PH} \equiv \frac{1-i\epsilon}{2} \begin{bmatrix} 0 & -1 & & \\ 1 & \ddots & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & 0 & \ddots & -1 \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (206)$$

であり、 \mathcal{A}^{PH} , \mathcal{B}^{PH} は $(N-1) \times (N-1)$ 行列である。 \mathcal{M}^{PH} の行列式は

$$\det \mathcal{M}^{PH} = \det(\mathcal{A}^{PH} + i\mathcal{B}^{PH}) \det(\mathcal{A}^{PH} - i\mathcal{B}^{PH}), \quad (207)$$

となる。ところが

$$\det(\mathcal{A}^{PH} + i\mathcal{B}^{PH}) = \det \begin{bmatrix} 0 & \lambda \\ \nu & \ddots & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & 0 & \ddots & \ddots & \lambda \\ & & & \nu & 0 \end{bmatrix} = \begin{cases} (-\lambda\nu)^{\frac{N-1}{2}}, & N \text{ が奇数の場合} \\ 0, & N \text{ が偶数の場合} \end{cases} \quad (208)$$

である。ここで

$$\nu \equiv \frac{1}{2}, \quad \lambda \equiv -\frac{1}{2}(1-i2\epsilon) \simeq -\frac{1}{2}e^{-2i\epsilon}. \quad (209)$$

である。 $\mathcal{A}^{PH} - i\mathcal{B}^{PH}$ は $\mathcal{A}^{PH} + i\mathcal{B}^{PH}$ の転置行列となるから、行列式は等しい。よって、 N を奇数にとらないとだめである。仮にそうとったとしても

$$\begin{aligned} \det \mathcal{M}^{PH} &= (-\lambda\nu)^{N-1} \\ &= \left(\frac{1}{4} e^{-i2\epsilon} \right)^{N-1} \\ &\simeq \left(\frac{1}{4} \right)^{N-1} e^{-2iT}, \end{aligned} \quad (210)$$

であり、したがって、積分は

$$\begin{aligned} \int \prod_{n=1}^{N-1} \frac{dq_n dp_n}{2\pi} \exp \left[\frac{i}{\hbar} (S_2^P + S_2^H) \right] &= \left[\frac{1}{\det \mathcal{M}^{PH}} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= 2^{N-1} e^{iT}, \end{aligned} \quad (211)$$

となり、1とはならない。

次に $\frac{i}{\hbar} S_2^z$ を含めた場合の同様の議論をする。

$$\begin{aligned} \frac{i}{\hbar} (S_2^P + S_2^z + S_2^H) &= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N \{p_n^2 + q_n^2 - a(p_n p_{n-1} + q_n q_{n-1}) - ia(q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1})\} \\ &= -\frac{1}{2} [{}^t \mathbf{q} \ {}^t \mathbf{p}] \mathcal{M}^{P\epsilon\mathcal{H}} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (212)$$

ここで、

$$a \equiv 1 - i\epsilon, \quad \mathcal{M}^{P\epsilon\mathcal{H}} \equiv \begin{bmatrix} \mathcal{A}^{P\epsilon\mathcal{H}} & \mathcal{B}^{P\epsilon\mathcal{H}} \\ -\mathcal{B}^{P\epsilon\mathcal{H}} & \mathcal{A}^{P\epsilon\mathcal{H}} \end{bmatrix}, \quad (213)$$

$$\mathcal{A}^{P\epsilon\mathcal{H}} \equiv \begin{bmatrix} 1 & -a/2 & & \\ -a/2 & \ddots & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 0 & \ddots & -a/2 \\ & & & -a/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}^{P\epsilon\mathcal{H}} \equiv \begin{bmatrix} 0 & ia/2 & & \\ -ia/2 & \ddots & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 0 & \ddots & ia/2 \\ & & & -ia/2 & 0 \end{bmatrix}, \quad (214)$$

である。 $\mathcal{M}^{P\epsilon\mathcal{H}}$ の行列式は前回と同様

$$\det \mathcal{M}^{P\epsilon\mathcal{H}} = \det(\mathcal{A}^{P\epsilon\mathcal{H}} + i\mathcal{B}^{P\epsilon\mathcal{H}}) \det(\mathcal{A}^{P\epsilon\mathcal{H}} - i\mathcal{B}^{P\epsilon\mathcal{H}}), \quad (215)$$

である。したがって

$$\det(\mathcal{A}^{P\epsilon\mathcal{H}} + i\mathcal{B}^{P\epsilon\mathcal{H}}) = \det \begin{bmatrix} 1 & -a & & \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 0 & \ddots & -a \\ & & & 0 & 1 \end{bmatrix} = 1, \quad (216)$$

であり、これは N の偶奇にかかわらず成立する。 $\mathcal{A}^{P\epsilon\mathcal{H}} - i\mathcal{B}^{P\epsilon\mathcal{H}}$ は $\mathcal{A}^{P\epsilon\mathcal{H}} + i\mathcal{B}^{P\epsilon\mathcal{H}}$ の転置であるから行列式はやはり1である。よって

$$\det \mathcal{M}^{P\epsilon\mathcal{H}} = 1, \quad (217)$$

である。したがって、積分は

$$\int \prod_{n=1}^{N-1} \frac{dq_n dp_n}{2\pi} \exp[i(S_2^P + S_2^z + S_2^H)] = \left[\frac{1}{\det \mathcal{M}^{P\epsilon\mathcal{H}}} \right]^{\frac{1}{2}} = 1, \quad (218)$$

となる。

B 停留作用の計算

両端を含む項を展開していない式に停留作用経路の解を代入して、正しい停留作用を求める。

$$\begin{aligned} \frac{i}{\hbar} S_{SAP}^{SCS} &\simeq 2S \ln \left(\cos \frac{\theta_F}{2} \cos \frac{\theta_{N-1}^S}{2} + e^{-i(\phi_F - \phi_{N-1}^S)} \sin \frac{\theta_F}{2} \sin \frac{\theta_{N-1}^S}{2} \right) \\ &\times \left(\cos \frac{\theta_1^S}{2} \cos \frac{\theta_I}{2} + e^{-i(\phi_1^S - \phi_I)} \sin \frac{\theta_1^S}{2} \sin \frac{\theta_I}{2} \right) \\ &+ \sum_{n=2}^{N-1} \left[-\frac{S}{4} \{(\theta_n^S - \theta_{n-1}^S)^2 + \sin \theta_n^S (\phi_n^S - \phi_{n-1}^S)^2\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + iS \left\{ (\phi_n^S - \phi_{n-1}^S)(\cos \theta_n^S - 1) - \frac{1}{2} \sin \theta_n^S (\theta_n^S - \theta_{n-1}^S)(\phi_n^S - \phi_{n-1}^S) \right\} \\
 & - \frac{i}{\hbar} \epsilon \sum_{n=1}^N \mathcal{H}(\theta_n^S, \theta_{n1}^S, \phi_n^S, \phi_{n-1}^S) \Big] \quad (219)
 \end{aligned}$$

$$\theta_n^S = \text{const.} \equiv \theta^S. \quad (220)$$

$$\cos \theta_n^S = \frac{1-R}{1+R}. \quad (221)$$

$$R = e^{-i(\phi_F - \phi_I)} \tan \frac{\theta_F}{2} \tan \frac{\theta_I}{2} e^{-iT}. \quad (222)$$

$$\phi_n^S = -\left(t_n - \frac{T}{2}\right) + \frac{1}{2}(\phi_F + \phi_I) - \frac{i}{2} \ln \frac{\tan \frac{\theta_I}{2}}{\tan \frac{\theta_F}{2}}. \quad (223)$$

[両端の項の計算]

$$\begin{aligned}
 & e^{-i(\phi_F - \phi_{N-1}^S)} \sin \frac{\theta_F}{2} \cos \frac{\theta_I}{2} \sin \frac{\theta^S}{2} \sin \frac{\theta^S}{2} \\
 = & e^{-it_{N-1} - i(\phi_F - \phi_I)} \sin \frac{\theta_I}{2} \cos \frac{\theta_F}{2} \sin \frac{\theta^S}{2} \cos \frac{\theta^S}{2} / (1+R). \quad (224)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & e^{-i(\phi_1^S - \phi_I)} \sin \frac{\theta_I}{2} \cos \frac{\theta_F}{2} \sin \frac{\theta^S}{2} \cos \frac{\theta^S}{2} \\
 = & e^{-it_{N-1} - i(\phi_F - \phi_I)} \sin \frac{\theta_I}{2} \cos \frac{\theta_F}{2} \sin \frac{\theta^S}{2} \cos \frac{\theta^S}{2} / (1+R). \quad (225)
 \end{aligned}$$

(224) + (225)

$$\begin{aligned}
 & = 2e^{-iT + i\epsilon - i(\phi_F - \phi_I)} \sin \frac{\theta_F}{2} \sin \frac{\theta_I}{2} / (1+R) \\
 & \sim 2e^{-iT - i(\phi_F - \phi_I)} \sin \frac{\theta_F}{2} \sin \frac{\theta_I}{2} / (1+R) \\
 & = \cos \frac{\theta_F}{2} \cos \frac{\theta_I}{2} \frac{2R}{1+R}. \quad (226)
 \end{aligned}$$

したがって、両端の項は以下になる。

$$\begin{aligned}
 & 2S \ln \left(\cos \frac{\theta_F}{2} \cos \frac{\theta_{N-1}^S}{2} + e^{-i(\phi_F - \phi_{N-1}^S)} \sin \frac{\theta_F}{2} \sin \frac{\theta_{N-1}^S}{2} \right) \left(\cos \frac{\theta_1^S}{2} \cos \frac{\theta_I}{2} + e^{-i(\phi_1^S - \phi_I)} \sin \frac{\theta_1^S}{2} \sin \frac{\theta_I}{2} \right) \\
 = & 2S \ln \left(\cos \frac{\theta_F}{2} \cos \frac{\theta_I}{2} \cos^2 \frac{\theta_{N-1}^S}{2} + e^{-iT - i(\phi_F - \phi_I)} \sin \frac{\theta_F}{2} \sin \frac{\theta_I}{2} \sin^2 \frac{\theta_{N-1}^S}{2} + \cos \frac{\theta_F}{2} \cos \frac{\theta_I}{2} \frac{2R}{1+R} \right) \\
 = & 2S \ln \left(\cos \frac{\theta_F}{2} \cos \frac{\theta_I}{2} \frac{1}{1+R} + \cos \frac{\theta_F}{2} \cos \frac{\theta_I}{2} \frac{2}{1+R} + \cos \frac{\theta_F}{2} \cos \frac{\theta_I}{2} \frac{R^2}{1+R} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2S \ln \left(\cos \frac{\theta_F}{2} \cos \frac{\theta_I}{2} \frac{1+2R+R^2}{1+R} \right) \\
&= 2S \ln \cos \frac{\theta_F}{2} \cos \frac{\theta_I}{2} (1+R) \\
&= 2S \ln \left(\cos \frac{\theta_F}{2} \cos \frac{\theta_I}{2} + e^{-i(\phi_F - \phi_I)} \sin \frac{\theta_F}{2} \sin \frac{\theta_I}{2} e^{-iT} \right). \tag{227}
\end{aligned}$$

[中間の項の計算]

$$-iS \sum_{n=2}^{N-1} (\phi_n^S - \phi_{n-1}^S) (1 - \cos \theta_n^S) = iS(N-2)\epsilon \left(1 - \frac{1-R}{1+R} \right) \simeq iST \frac{2R}{1+R}. \tag{228}$$

[Hamiltonian の項]

$$\begin{aligned}
-\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N \left(\hbar S \frac{1 - \bar{\xi}_n^S \xi_{n-1}^S}{1 + \bar{\xi}_n^S \xi_{n-1}^S} \right) &= i\epsilon S \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1-P}{1+P} + i\epsilon \frac{1 - \xi_F^* \xi_{N-1}^S}{1 + \xi_F^* \xi_{N-1}^S} \\
&= iS(N-1)\epsilon \frac{1-R-i\epsilon R}{1+R+i\epsilon R} + i\epsilon \frac{1 - \xi_F^* \xi_{N-1}^S}{1 + \xi_F^* \xi_{N-1}^S} \\
&\simeq iST \frac{1-R}{1+R}. \tag{229}
\end{aligned}$$

$$(228) + (229) = iST \left(\frac{2R}{1+R} + \frac{1-R}{1+R} \right) = iST. \tag{230}$$

これらをまとめると

$$\frac{i}{\hbar} S_{SAP}^{SCS} = iST + 2S \ln \left(\cos \frac{\theta_F}{2} \cos \frac{\theta_I}{2} + e^{-i(\phi_F - \phi_I)} \sin \frac{\theta_F}{2} \sin \frac{\theta_I}{2} e^{-iT} \right), \tag{231}$$

となる。

C SCSPI における揺らぎの計算

$S_{SCS}[\{\xi_n^*\}, \{\xi_n\}]$ を (η_n, η_n^*) に関して展開して $S_2^{SCS}[\{\eta_n^*\}, \{\eta_n\}]$ を求める。

$$S_{SCS}[\{\xi_n^*\}, \{\xi_n\}] = S_{\text{overlap}}[\{\xi_n^*\}, \{\xi_n\}] - \epsilon \sum_{n=1}^N \mathcal{H}(\xi_n^*, \xi_{n-1}). \tag{232}$$

$$\frac{i}{\hbar} S_{\text{overlap}}[\{\xi_n^*\}, \{\xi_n\}] \equiv -S \ln(1 + |\xi_F|^2)(1 + |\xi_I|^2) + 2S \left\{ \sum_{n=1}^{N-1} \ln(1 + \xi_n^* \xi_n) - \sum_{n=1}^N \ln(1 + \xi_n^* \xi_{n-1}) \right\}. \tag{233}$$

$$\mathcal{H}(\xi_n^*, \xi_{n-1}) = -\hbar S \frac{1 - \xi_n^* \xi_{n-1}}{1 + \xi_n^* \xi_{n-1}}. \tag{234}$$

$$\xi_n = \xi_n^S + \eta_n. \quad (235)$$

$$\xi_n^* = \bar{\xi}_n^S + \eta_n^*. \quad (236)$$

$$\eta_0 = \eta_N^* = 0. \quad (237)$$

$$P = \bar{\xi}_n^S \xi_{n-1}^S. \quad (238)$$

$$R = \bar{\xi}_n^S \xi_n^S. \quad (239)$$

$$\frac{i}{\hbar} \frac{\partial \mathcal{S}_{\text{overlap}}}{\partial \xi_n^*} = -2S \frac{\xi_n - \xi_{n-1}}{(1 + \xi_n^* \xi_{n-1})(1 + \xi_n^* \xi_n)}, \quad (240)$$

から

$$\frac{i}{\hbar} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{S}_{\text{overlap}}}{\partial \xi_n^{*2}} = S \frac{(\xi_n - \xi_{n-1})(\xi_n + \xi_{n-1} + 2\xi_n^* \xi_n \xi_{n-1})}{(1 + \xi_n^* \xi_{n-1})^2 (1 + \xi_n^* \xi_n)^2}, \quad (241)$$

である。同様に

$$\frac{i}{\hbar} \frac{\partial \mathcal{S}_{\text{overlap}}}{\partial \xi_{n-1}} = 2S \frac{\xi_n^* - \xi_{n-1}^*}{(1 + \xi_n^* \xi_{n-1})(1 + \xi_{n-1}^* \xi_{n-1})}, \quad (242)$$

から

$$\frac{i}{\hbar} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{S}_{\text{overlap}}}{\partial \xi_{n-1}^2} = -S \frac{(\xi_n^* - \xi_{n-1}^*)(\xi_n^* + \xi_{n-1}^* + 2\xi_n^* \xi_{n-1}^* \xi_{n-1})}{(1 + \xi_n^* \xi_{n-1})^2 (1 + \xi_{n-1}^* \xi_{n-1})^2}, \quad (243)$$

である。また

$$\frac{i}{\hbar} \frac{\partial^2 \mathcal{S}_{\text{overlap}}}{\partial \xi_n^* \partial \xi_n} = -S \frac{1}{(1 + \xi_n^* \xi_n)^2}, \quad (244)$$

$$\frac{i}{\hbar} \frac{\partial^2 \mathcal{S}_{\text{overlap}}}{\partial \xi_n^* \partial \xi_{n-1}} = S \frac{1}{(1 + \xi_n^* \xi_{n-1})^2}, \quad (245)$$

である。

次に Hamiltonian の項を考える。

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_n^*} = 2\hbar S \frac{\xi_{n-1}}{(1 + \xi_n^* \xi_{n-1})^2}. \quad (246)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \xi_n^{*2}} = -2\hbar S \frac{(\xi_{n-1})^2}{(1 + \xi_n^* \xi_{n-1})^3} = \frac{-\xi_{n-1}}{1 + \xi_n^* \xi_{n-1}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_n^*}. \quad (247)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_{n-1}} = 2\hbar S \frac{\xi_n^*}{(1 + \xi_n^* \xi_{n-1})^2}. \quad (248)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \xi_{n-1}^2} = -2\hbar S \frac{(\xi_n^*)^2}{(1 + \xi_n^* \xi_{n-1})^3} = \frac{-\xi_n^*}{1 + \xi_n^* \xi_{n-1}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_{n-1}}. \quad (249)$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \xi_n^* \partial \xi_{n-1}} = 2\hbar S \frac{1 - \xi_n^* \xi_{n-1}}{(1 + \xi_n^* \xi_{n-1})^3}. \quad (250)$$

これらをまとめると

$$\begin{aligned} & \frac{i}{\hbar} \mathcal{S}_2^{SCS}[\{\eta_n^*\}, \{\eta_n\}] \\ &= \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{S}_{\text{overlap}}}{\partial \xi_n^{*2}} \Big|_S (\eta_n^*)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{S}_{\text{overlap}}}{\partial \xi_{n-1}^2} \Big|_S (\eta_{n-1})^2 + \frac{\partial^2 \mathcal{S}_{\text{overlap}}}{\partial \xi_n^* \partial \xi_n} \Big|_S \eta_n^* \eta_n + \frac{\partial^2 \mathcal{S}_{\text{overlap}}}{\partial \xi_n^* \partial \xi_{n-1}} \Big|_S \eta_n^* \eta_{n-1} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \epsilon \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \xi_n^{*2}} \Big|_S (\eta_n^*)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \xi_{n-1}^2} \Big|_S (\eta_{n-1})^2 + \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \xi_n^* \partial \xi_{n-1}} \Big|_S \eta_n^* \eta_{n-1} \right\} \\
& = S \left[\sum_{n=1}^{N-1} \frac{(\xi_n^S \eta_n^*)^2 + (\bar{\xi}_n^S \eta_n)^2 - 2|\eta_n|^2}{(1+R)^2} \right. \\
& \quad \left. - \sum_{n=1}^N \frac{(\xi_{n-1}^S \eta_n^*)^2 + (\bar{\xi}_n^S \eta_{n-1})^2 - 2\eta_n^* \eta_{n-1}}{(1+P)^2} + 2i\epsilon \sum_{n=1}^N \frac{(\xi_{n-1}^S \eta_n^*)^2 + (\bar{\xi}_n^S \eta_{n-1})^2 - (1-P)\eta_n^* \eta_{n-1}}{(1+P)^3} \right] \\
& = \frac{S}{(1+P)^2} \sum_{n=1}^{N-1} \left[\left(\frac{1+P}{1+R} \right)^2 \{ (\xi_n^S \eta_n^*)^2 + (\bar{\xi}_n^S \eta_n)^2 - 2|\eta_n|^2 \} \right. \\
& \quad \left. - \{ (\xi_{n-1}^S \eta_n^*)^2 + (\bar{\xi}_{n+1}^S \eta_n)^2 - 2\eta_n^* \eta_{n-1} \} + 2i\epsilon \{ (\xi_{n-1}^S \eta_n^*)^2 + (\bar{\xi}_{n+1}^S \eta_n)^2 - (1-P)\eta_n^* \eta_{n-1} \} / (1+P) \right], \\
& \hspace{25em} (251)
\end{aligned}$$

となる。

C.1 η_n, η_n^* の係数が零になることの証明

$(\eta_n^*)^2$ の項の Hamiltonian 以外からくる部分

$$\begin{aligned}
\frac{i}{\hbar} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 S_{\text{overlap}}}{\partial \xi_n^{*2}} \Big|_S & = S \frac{(\xi_n^S - \xi_{n-1}^S)(\xi_n^S + \xi_{n-1}^S + 2\bar{\xi}_n^S \xi_n^S \xi_{n-1}^S)}{(1 + \bar{\xi}_n^S \xi_{n-1}^S)^2 (1 + \bar{\xi}_n^S \xi_n^S)^2} \\
& \simeq 2S \frac{\xi_{n-1}^S (\xi_n^S - \xi_{n-1}^S)}{(1 + \bar{\xi}_n^S \xi_{n-1}^S)^2 (1 + \bar{\xi}_n^S \xi_n^S)} \quad (\xi_n^S + \xi_{n-1}^S \simeq 2\xi_{n-1}^S) \\
& = -\frac{i\epsilon}{\hbar} \left(\frac{\xi_{n-1}}{1 + \xi_n^* \xi_{n-1}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_n^*} \right) \Big|_S \quad ((135) \text{ を用いた。}) \\
& \hspace{25em} (252)
\end{aligned}$$

したがって、 $(\eta_n^*)^2$ の項が消える為の必要十分条件は

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \xi_n^{*2}} \Big|_S = -\frac{\xi_{n-1}}{1 + \xi_n^* \xi_{n-1}} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_n^*} \Big|_S, \quad (253)$$

すなわち

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi_n^*} (1 + \xi_n^* \xi_{n-1})^2 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_n^*} \right) \Big|_S = 0, \quad (254)$$

である。 $\hat{H} = -\hbar \hat{S}_z$ の場合 (246) より上式の条件を満たす。したがって、 $(\eta_n^*)^2$ の項は消える。 $(\eta_n)^2$ の項も同様の理由により消える。

このように、 η_n^*, η_n に関して二次の項の中に差分方程式の情報が使われて係数が零になるということは、Hamiltonian が \hat{S}_z に比例するときの性質であり、例えば Hamiltonian が \hat{S}_z^2 に比例するときの場合には上述の条件は満たされない。

$$\hat{H} \propto \hat{S}_z^2. \quad (255)$$

$$\mathcal{H}(\xi_n^*, \xi_{n-1}) \propto S^2 - 2S(2S-1) \left\{ -\frac{1}{1 + \xi_n^* \xi_{n-1}} + \frac{1}{(1 + \xi_n^* \xi_{n-1})^2} \right\}. \quad (256)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_n^*} \propto \left[\frac{1}{(1 + \xi_n^* \xi_{n-1})^2} - \frac{1}{(1 + \xi_n^* \xi_{n-1})^3} \right] \xi_{n-1}. \quad (257)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \xi_n^*} \left((1 + \xi_n^* \xi_{n-1})^2 \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \xi_n^*} \right) & \propto \frac{\partial}{\partial \xi_n^*} \left(\frac{\xi_{n-1}}{1 + \xi_n^* \xi_{n-1}} \right) \\
& \propto \frac{\xi_{n-1}^2}{(1 + \xi_n^* \xi_{n-1})^2} \neq 0. \\
& \hspace{25em} (258)
\end{aligned}$$

D θ, ϕ 表示での揺らぎの構造

(θ, ϕ) 表示での揺らぎの計算を考える。

$$\xi_n = e^{i\phi_n} \tan \frac{\theta_n}{2} = \xi_n^S + \eta_n \equiv e^{i\phi_n^S} \tan \frac{\theta_n^S}{2} + \eta_n. \quad (259)$$

$$\xi_n^* = e^{-i\phi_n} \tan \frac{\theta_n}{2} = \bar{\xi}_n^S + \eta_n^* \equiv e^{-i\phi_n^S} \tan \frac{\theta_n^S}{2} + \eta_n^*. \quad (260)$$

θ_n, ϕ_n を停留作用経路と揺らぎに分ける。

$$\theta_n = \theta_n^S + \vartheta_n. \quad (261)$$

$$\phi_n = \phi_n^S + \varphi_n. \quad (262)$$

$$\begin{aligned} & e^{i(\phi_n^S + \varphi_n)} \tan \left(\frac{\theta_n^S}{2} + \frac{\vartheta_n}{2} \right) \\ & \simeq e^{i\phi_n^S} \tan \frac{\theta_n^S}{2} + e^{i\phi_n^S} \tan \frac{\theta_n^S}{2} \left[\frac{1}{\sin \theta_n^S} \frac{\vartheta_n}{2} + i\varphi_n \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta_n^S}{2}} \left(\frac{\vartheta_n}{2} \right)^2 - \frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{i}{\sin \theta_n^S} \vartheta_n \varphi_n \right] \end{aligned} \quad (263)$$

したがって

$$\eta_n = e^{i\phi_n^S} \tan \frac{\theta_n^S}{2} \left[\frac{1}{\sin \theta_n^S} \frac{\vartheta_n}{2} + i\varphi_n \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta_n^S}{2}} \left(\frac{\vartheta_n}{2} \right)^2 - \frac{1}{2}\varphi^2 + \frac{i}{\sin \theta_n^S} \vartheta_n \varphi_n \right]. \quad (264)$$

である。同様に η^* は

$$\eta_n^* = e^{-i\phi_n^S} \tan \frac{\theta_n^S}{2} \left[\frac{1}{\sin \theta_n^S} \frac{\vartheta_n}{2} - i\varphi_n \frac{1}{\cos^2 \frac{\theta_n^S}{2}} \left(\frac{\vartheta_n}{2} \right)^2 - \frac{1}{2}\varphi^2 - \frac{i}{\sin \theta_n^S} \vartheta_n \varphi_n \right], \quad (265)$$

となる。

$$\eta_n^* \eta_n \simeq \tan^2 \frac{\theta_n^S}{2} \left(\frac{1}{\sin \theta_n^S} \vartheta_n^2 + \varphi_n \right). \quad (266)$$

$$\begin{aligned} \eta_n^* \eta_{n-1} & \simeq e^{-i(\phi_n^S - \phi_{n-1}^S)} \tan \frac{\theta_n^S}{2} \tan \frac{\theta_{n-1}^S}{2} \\ & \times \left[\frac{1}{\sin \theta_n^S \sin \theta_{n-1}^S} \vartheta_n \vartheta_{n-1} + \varphi_n \varphi_{n-1} + i \left(\frac{1}{\sin \theta_{n-1}^S} \varphi_n \vartheta_n - \frac{1}{\sin \theta_n^S} \vartheta_n \varphi_{n-1} \right) \right] \end{aligned} \quad (267)$$

$$\theta_n^S = \text{const.}, \quad \tan^2 \frac{\theta_n^S}{2} = R, \quad \phi_n^S - \phi_{n-1}^S = -\epsilon.$$

$\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}_2^{SCS}$ は (171) から

$$\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}_2^{SCS} = -\frac{2S}{(1+R)^2} \sum_{n=1}^{N-1} \left[\eta_n^* \eta_n - \left(\frac{1+R}{1+P} \right)^2 (1-i\epsilon) \eta_n^* \eta_{n-1} \right] \quad (268)$$

である。ここで

$$\vartheta_n = \frac{2\sqrt{R}}{1+R} \tilde{\vartheta}_n, \quad (269)$$

$$\varphi_n = \tilde{\varphi}_n, \quad (270)$$

と変換すると、先ず積分測度は

$$\begin{aligned} \frac{2S+1}{4\pi} \sin \theta_n d\theta_n d\phi_n &\simeq \frac{2S}{4\pi} \sin \vartheta_n d\vartheta_n d\varphi_n \\ &= \frac{2S}{\pi} \frac{R}{(1+R)^2} d\tilde{\vartheta}_n d\tilde{\varphi}_n, \end{aligned} \quad (271)$$

となる。次に $\frac{i}{\hbar} S_2^{SCS}$ は

$$\begin{aligned} \frac{i}{\hbar} S_2^{SCS} &\simeq -\frac{2S}{(1+R)^2} \sum_{n=1}^{N-1} \left[R(\tilde{\vartheta}_n^2 + \tilde{\varphi}_n^2) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{1+R}{1+P} \right)^2 R \{ \tilde{\vartheta}_n \tilde{\vartheta}_{n-1} + \tilde{\varphi}_n \tilde{\varphi}_{n-1} + i(\tilde{\varphi}_n \tilde{\vartheta}_{n-1} - \tilde{\vartheta}_n \tilde{\varphi}_{n-1}) \} \right] \\ &= -2S \frac{R}{(1+R)^2} \sum_{n=1}^{N-1} \left[\tilde{\vartheta}_n^2 + \tilde{\varphi}_n^2 + 2a \{ \tilde{\vartheta}_n \tilde{\vartheta}_{n-1} + \tilde{\varphi}_n \tilde{\varphi}_{n-1} + i(\tilde{\varphi}_n \tilde{\vartheta}_{n-1} - \tilde{\vartheta}_n \tilde{\varphi}_{n-1}) \} \right] \\ &= -2S \frac{R}{(1+R)^2} \begin{bmatrix} {}^t \tilde{\vartheta} & {}^t \tilde{\varphi} \end{bmatrix} \mathcal{M} \begin{bmatrix} \tilde{\vartheta} \\ \tilde{\varphi} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (272)$$

となる。ここで

$$2a \equiv \left(\frac{1+R}{1+P} \right)^2, \quad (273)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\vartheta} \\ \tilde{\varphi} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \tilde{\vartheta}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\vartheta}_{N-1} \\ \tilde{\varphi}_1 \\ \vdots \\ \tilde{\varphi}_{N-1} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{M} \equiv \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ -\mathcal{B} & \mathcal{A} \end{bmatrix}, \quad (274)$$

$$\mathcal{A} \equiv \begin{bmatrix} 1 & -a & & \\ -a & \ddots & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 0 & \ddots & -a \\ & & & -a & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} \equiv \begin{bmatrix} 0 & ia & & \\ -ia & \ddots & \ddots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & 0 & \ddots & ia \\ & & & -ia & 0 \end{bmatrix}, \quad (275)$$

であり、 \mathcal{A}, \mathcal{B} は $(N-1) \times (N-1)$ 行列である。これは (ボゾン) コヒーレント状態の場合と同様の形をしており、付録 A から

$$\det \mathcal{M} = \det(\mathcal{A} + i\mathcal{B})(\mathcal{A} - i\mathcal{B}) = 1, \quad (276)$$

である。したがって、 θ, ϕ 表示での揺らぎの積分は

$$\int \prod_{n=1}^{N-1} \frac{2S}{\pi} \frac{R}{(1+R)^2} d\tilde{\vartheta}_n d\tilde{\varphi}_n \exp \left\{ -2S \frac{R}{(1+R)^2} \begin{bmatrix} {}^t \tilde{\vartheta} & {}^t \tilde{\varphi} \end{bmatrix} \mathcal{M} \begin{bmatrix} \tilde{\vartheta} \\ \tilde{\varphi} \end{bmatrix} \right\} = 1, \quad (277)$$

となる。

References

- [1] L. S. Schulman, *Techniques and Applications of Path Integration* (Wiley, New York, 1981).
- [2] R. P. Feynman and A. R. Hibbs, *Quantum Mechanics and Path Integrals* (McGraw-Hill, New York, 1965).

- [3] J. R. Klauder, Phys. Rev. D **19**, 2349 (1979).
- [4] H. Kuratsuji and T. Suzuki, J. Math. Phys. **21**, 472 (1980).
- [5] H. Kuratsuji and Y. Mizobuchi, J. Math. Phys. **22**, 757 (1981).
- [6] E. Fradkin, *Field Theories of Condensed Matter Systems* (Addison-Wesley, 1991).
- [7] *Quantum Tunneling of Magnetization*, Proceedings of the NATO workshop, Chichilianne, France, 1994, edited by L. Gunther and B. Barbara (Kluwer Academic, Norwell, MA, 1995).
- [8] H. G. Solari, J. Math. Phys. **28**, 1097 (1987).
- [9] K. Funahashi, T. Kashiwa, and S. Sakoda, J. Math. Phys. **36**, 3232 (1995).
- [10] C. Itzykson and J-B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGRAW-HILL, 1985)
- [11] A. H. Castro Neto and A. O. Caldeira, Phys. Rev. A **42**, 6884 (1990).
- [12] J. M. Radcliffe, J. Phys. A **4**, 313 (1971).